RÉSUMÉ DES TRAVAUX ET PROJET DE RECHERCHES

GABRIEL PALLIER

Mes travaux de recherche se situent à l'interface de la théorie géométrique des groupes et de l'analyse sur les espaces métriques. Les objets d'étude sont les groupes de Lie connexes résolubles. Les principales questions qui ont motivé mes recherches jusqu'à présent ont porté sur leur classification (du point de vue de la géométrie à grande échelle) ainsi que certaines propriétés de rigidité ou de stabilité, usuellement établies à l'aide d'un certain type d'analyse.

Ce document présente mes sujets de recherche, depuis le contexte et les principales questions jusqu'aux résultats les plus importants, et évoque des prolongements possibles. Les énoncés dont le titre est souligné (à partir de la page 6) sont ceux auxquels j'ai contribué. La section 1 contient un bref survol, la présentation n'est pas chronologique. Les questions qui m'occupent le plus actuellement (mars 2022) sont les Questions 5 et 8.

Dans tout ce document, sauf mention explicite du contraire, par groupe de Lie j'entends groupe de Lie connexe. Les groupes de Lie semi-simples sont supposés de centre trivial. La lettre gothique $\mathfrak{g}$, resp. $\mathfrak{h}$, etc. désigne l'algèbre de Lie du groupe de Lie G, resp. H, etc.

TABLE DES MATIÈRES

1. QUASIISOMÉTRIES ET GROUPES

Définition 1. Soit X et Y des espaces métriques. Une application $\phi\colon X \to Y$ est une quasiisométrie s'il existe $\kappa \geqslant 1$ et $c \geqslant 0$ tels que $\kappa^{-1} d(x,x') - c \leqslant d(\phi(x), \phi(x')) \leqslant \kappa d(x,x') + c$ et pour tout y dans Y, $d(y, f(X)) \leqslant c$.

Les quasiisométries apparaissent notamment dans les situations suivantes :

(A) Entre les revêtement universels de deux variétés riemanniennes compactes de même type d'homotopie.

(B) Entre deux *graphes de Cayley* [1] sur des partie génératrices finies d'un groupe de type fini donné : on peut donc qualifier ces groupes de quasiisométriques ou non sans donner plus de précision.

(C) Entre deux réseaux *uniformes* dans un groupe localement compact compactement engendré,

Date: Mars 2022.

1. Voir par exemple l'ouvrage introductif [dlH00, IV.A] au sujet des graphes de Cayley.

Groupe	Espace modèle
Groupe de Lie semi-simple	Espace riemannien globalement symétrique
Groupe libre de type fini	Arbre [Ser77]
Groupe hyperbolique	Espace Gromov-hyperbolique [Gro87]
Groupe hyperbolique moyennable	Espace millefeuille [CCMT15]

TABLE 1. Quelques groupes localement compacts compactement engendrés et leurs modèles.

(D) Entre deux groupes de type fini Γ et Λ, dans la situation suivante : il existe $N \triangleleft \Gamma$, $L \triangleleft \Lambda$ finis et G un groupe localement compact, tels que Γ/N et Λ/L sont isomorphes à des sous-groupes d'indice fini dans deux sous-groupes $\widehat{\Gamma}$ et $\widehat{\Lambda}$ conjugués dans G : on dit alors que Γ et Λ sont commensurables à noyau fini près dans G.

(E) Entre des métriques géodésiques propres invariantes à gauche sur un groupe de Lie connexe donné.

Tous ces exemples relèvent du principe Švarc-Milnor, qui peut être exprimé comme suit. Si un groupe localement compact G agit continûment de façon propre et cocompacte par isométries sur deux espaces métriques géodésiques propres X et Y, alors ces espaces sont quasi-isométriques, et le groupe G est compactement engendré. De plus tout groupe localement compact compactement engendré possède une telle action, qu'on qualifie de *géométrique* (on trouvera quelques exemples sur le tableau 1). Par conséquent, la relation de quasiisométrie fait sens entre les groupes localement compacts compactement engendrés sans qu'il soit nécessaire a priori de préciser une métrique.

À la suite de Gromov ([Gro83], [Gro84]), les quasi-isométries sont étudiées dans le cadre de la théorie géométrique des groupes autour de deux objectifs principaux : la classification et la rigidité.

Classification quasiisométrique: Classifier les groupes d'une classe donnée (par exemple, les groupes polycycliques finiment engendrés) à quasiisométrie près.

Rigidité quasiisométrique: Décrire de manière courte et explicite les groupes quasiisométriques à un groupe ou un espace donné (par exemple, $\mathbb{H}^n$). Pour cela, il y a généralement deux niveaux : étant donné un groupe Γ, on peut dire qu'il y a rigidité quasiisométrique de Γ lorsque

(1) (*Modèle commun*) Γ possède un modèle préféré X tel que tout groupe quasiisométrique à Γ agit géométriquement sur X, ou bien

(2) (*Commensurabilité*) Tout groupe Λ quasiisométrique à Γ possède un certain degré de commensurabilité avec Γ.

Ces deux formulations ne sont, en général, pas formellement équivalentes. Cependant, lorsque (2) se produit sous la forme la plus forte possible, c'est à -dire la commensurabilité à noyau fini près dans un groupe G comme dans (D) ci-dessus, la propriété (1) est impliquée.

Si l'on tient à inclure les groupes localement compactement engendrés dans les énoncés de rigidité quasiisométrique, un remplacement convenable de la commensurabilité qui efface la distinction entre réseaux et leurs enveloppes uniformes est la relation de commabilité [Cor15]. On dit de deux groupes localement compacts compactement engendrés qu'ils sont *commables* s'ils sont reliés par une chaîne finie de morphismes avec des images co-compactes fermées et des noyaux compacts.

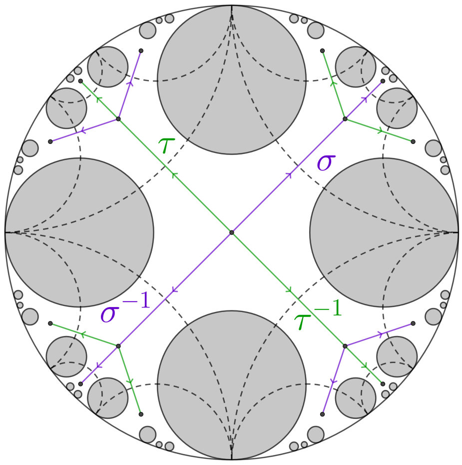

FIGURE 1. Le groupe libre non-abélien à deux générateurs et deux modèles géométrique. Le premier est son graphe de Cayley standard, un arbre localement fini. Le second est obtenu en faisant agit Γ par deux isométries loxodromiques sur $\mathbb{H}^2$, et en retirant deux horoboules et leurs images par Γ (on équipe le résultat non pas de la métrique induite mais de la métrique de longueur des plus courts chemins qui évitent les horoboules). En dimension plus grande cet espace est utile dans la démonstration de la rigidité quasiisométrique pour les réseaux non uniformes [Sch95].

La rigidité quasiisométrique sous les formes évoquées précédemment a été démontrée dans de nombreux cas : sans chercher l'exhaustivité, dans [Tuk86, Pan89b, KL97, Sch95, Esk98, Dru02] pour les réseaux des groupes de Lie semi-simples, plus largement dans [Wor07] pour les réseaux S-arithmétiques, dans [FM99, EFW12, EFW13, Dym10, Pen11a, Pen11b] pour certains groupes résolubles, [BP03, Xie06] pour des groupes d'automorphismes d'immeubles fuchsiens, [Mos09, BKMM12] pour les groupes modulaires de surfaces de genre et de nombre de pointes assez grand, [HK18] pour des familles de groupes d'Artin à angle droit. Elle est parfois, quoique non systématiquement, atteinte par une méthode géométrique, consistant à décrire le groupe des quasiisométries du groupe (ou d'un modèle donné), prises modulo la relation d'être à distance bornée.

Pendant ce temps, bien que des progrès aient eu lieu dans la classification à quasiisométrie près, certaines questions déjà présentes au début de la théorie sont restées sans réponses. D'après le théorème de croissance polynomiale de Gromov, la classe des groupes de type fini ayant un sous-groupe nilpotent d'indice fini est close par quasiisométrie [Gro81].

Problème 1 ([Pan89b, FM00]). *Classer les groupes nilpotents de type fini ou de Lie connexes* [2] *à quasiisométrie près.*

Le Problème 1 a lui-même deux extensions, chacune ayant été partiellement réalisée de sorte qu'une image conjecturale peut être donnée, mais semble actuellement hors d'atteinte.

Problème 2 ([EF10]). *Classer les groupes polycycliques à quasiisométrie près.*

Problème 3 ([Cor18]). *Classer les groupes de Lie (connexes) à quasiisométrie près.*

2. Ce problème gagne réellement à être formulé en termes de groupes de Lie, car tout groupe nilpotent sans torsion est réseau d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe [Mal51]. Il apparaît ainsi plus vaste mais aussi plus naturel ; j'y reviendrai dans le commentaire du Théorème 3 et au §4.3.

Le Problème 3 est aussi digne d'intérêt dans la classe plus large des groupes de Lie S-adiques, cependant il faut prendre garde au fait que ceux-ci ne sont pas, en général, compactement engendrés [3] de sorte qu'il n'est pas bien posé dans cette généralité. Le Problème 3 dans le cas connexe se ramène au cas simplement connexe résoluble [Cor08, Cor11] et cette réduction joue un rôle important dans mon tavail que je présenterai plus loin. Du côté des groupes de type fini, la classe des groupes possédant un sous-groupe de type fini résoluble n'est pas close par quasiisométrie, le Problème 2 n'y serait donc pas bien posé [Dyu00].

Gromov a donné en 1993 une caractérisation abstraite (parfois qualifiée de "dynamique") de la relation de quasiisométrie [Gro93]. À partir de cette caractérisation, une relation analogue, l'équivalence mesurée, apparait de façon relativement naturelle.

Proposition – Définition 1. Soient Γ et Λ deux groupes de type fini [4].

(QI) Γ et Λ sont quasiisométrie si et seulement s'il existe un couplage topologique entre Γ et Λ, c'est-à-dire un espace localement compact $\mathcal{X}$ et une paire d'actions qui commutent de Γ et Λ sur $\mathcal{X}$.

(ME) Γ et Λ sont mesurablement équivalents s'il existe un couplage mesurable entre eux, c'est-à-dire, un espace mesuré σ-fini $\mathcal{X}$ et une paire d'actions qui commutent, préservant la mesure et co-finies.

Une équivalence mesurée entre Γ et Λ donne naissance à des cocycles mesurables $\Gamma \times \mathcal{X} \to \Lambda$ et $\Lambda \times \mathcal{X} \to \Gamma$. Elle fait sens pour des paires de groupes localement compacts unimodulaires [5]. L'équivalence mesurée n'est pas très fine pour les groupes moyennables : elle ne discerne pas les groupes moyennables unimodulaires non compacts. Cependant, une observation clé dûe à Shalom est qu'entre groupes de type fini [6] moyennables, une quasiisométrie procure une borne essentielle sur les cocycles : on peut parler d'équivalence mesurée *uniforme* (ou L^∞) [Sha04]. Ce point de vue a ouvert la voie à une nouvelle approche du Problème 1 de classification à quasiisométrie près des groupes nilpotents.

Théorème 1 (Shalom, [Sha04])**.** *Soient Γ et Λ deux groupes nilpotents de type fini. Si Γ et Λ sont quasiisométriques, alors $b_p(\Gamma) = b_p(\Lambda)$ pour tout $p \geqslant 0$.*

Théorème 2 (Sauer, [Sau06])**.** *Si Γ et Λ sont quasiisométriques alors les algèbres $H^*(\Gamma, \mathbf{R})$ et $H^*(\Lambda, \mathbf{R})$ munies du cup-produit sont isomorphes.*

Théorème 3 (Gotfredsen et Kyed, [GK21])**.** *Soient G et H deux groupes de Lie nilpotents simplement connexes. Si G et H sont quasiisométriques alors les algèbres $H^*(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ et $H^*(\mathfrak{h}, \mathbf{R})$ munies du cup-produit sont isomorphes.*

Ces trois théorèmes démontrés en voyant la quasiisométrie comme l'équivalence mesurée uniforme sont de force strictement croissante. En effet, si Γ est un réseau dans un groupe de Lie nilpotent simplement connexe G, alors $H^*(\Gamma, \mathbf{R}) = H^*(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ [Nom54] (c'est aussi la cohomologie de la nilvariété $N = G/\Gamma$) ; d'autre part, un tel groupe G ne possède pas toujours un réseau, c'est le cas seulement si $\mathfrak{g}$ a des formes rationnelles [Mal51]. Si l'on pense à la quasiisométrie comme à la manifestation à grande échelle d'une équivalence

3. L'ouvrage [CdlH16] donne des critères utiles pour cela.

4. En lien avec la situation (C), il est à noter que la quasiisométrie, respectivement l'équivalence mesurée, est directement impliquée par (QI), respectivement par (ME) pour les paires de réseaux uniformes, respectivement pour les paires de réseaux, d'un groupe de Lie connexe G en considérant $\mathcal{X} = G$ et les actions de Γ et Λ par multiplication à gauche et à droite.

5. Dans des travaux récents et en cours, un effort est mené pour étendre la théorie de l'équivalence mesurée à des groupes non unimodulaires [KKR21b].

6. Grâce à [BR18] et [KKR21a] nous disposons dorénavant d'une formulation très appréciable : pour les paires de groupes moyennables unimodulaires localement compacts, l'équivalence mesurée uniforme et la quasiisométrie définissent la même relation.

d'homotopie (ici, entre nilvariétés) conformément à la situation (A), le Théorème 3 atteste que la cohomologie de l'algèbre de Lie recèle une information d'ordre topologique ; pour un groupe nilpotent simplement connexe sans réseau cette information topologique n'est pas incarnée dans le type d'homotopie d'une variété compacte [7], mais bien dans le type de quasiisométrie du groupe lui-même.

L'étude de l'équivalence mesurée précède en fait Gromov et l'avènement de la théorie géométrique des groupes telle que nous la connaissons aujourd'hui. Cependant, le parallèle avec la quasiisométrie a fait naître de nouveaux théorèmes pour l'équivalence mesurée, inspirés des rigidités et classification quasiisométriques mais en général différents. Je sélectionne ici un théorème récent d'Austin qui est en lien avec la suite de ce résumé. Il convient pour cela de rappeler qu'à toute algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$ on associe l'algèbre nilpotente graduée

$$\mathrm{gr}(\mathfrak{n}) = \bigoplus_{i \geqslant 1} \mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}, \tag{gr}$$

où $\mathfrak{g}^i$ désigne le i-ème terme de la série centrale et les crochets sont induits par ceux de $\mathfrak{n}$; le groupe de Lie simplement connexe correspondant est noté $\mathrm{gr}(N)$.

Théorème 4 (Austin, [Aus16])**.** *Soient Γ et Λ deux groupes nilpotents de type fini, et soient G et H les groupes de Lie nilpotents simplement connexes contenant $\Gamma/\Gamma_{\mathrm{tors.}}$ et $\Lambda/\Lambda_{\mathrm{tors.}}$ comme réseaux. Si Γ et Λ sont L^1-mesurablement équivalents (c'est-à-dire, mesurablement équivalents au moyen de cocycles intégrables), alors $\mathrm{gr}(G)$ et $\mathrm{gr}(H)$ sont isomorphes.*

2. Cônes asymptotiques

Je reviens ici provisoirement à une approche plus ancienne des questions posées par les quasiisométries. La notion de cône asymptotique (ou de cône tangent à l'infini) est née des travaux de Gromov sur les groupes de croissance polynomiale. La version ci-dessous en est une reformulation plus tardive [vdDW84].

Définition 2 (Cône asymptotique)**.** Soit X un espace métrique et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{N}$. Pour toute suite $(x_n, \sigma_n) \in X^{\mathbf{N}} \times (0,\infty)^{\mathbf{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$, on définit $\mathrm{Cone}_{\mathcal{U}}(X, x_n, \sigma_n)$. On dit que le cône asymptotique est *pointé* si (x_n) est constante.

À homéomorphisme bilipschitzien près, les cônes asymptotiques sont des invariants de quasiisométrie, et pour les espaces isométriquement homogènes, les cônes asymptotiques ne dépendent pas des points de base, ainsi on peut calculer les cônes asymptotiques en fixant la suite x_n. Deux utilisations des cônes asymptotiques d'une importance significative dans le développement du programme de rigidité et classification quasiisométrique sont celles de Pansu, Kleiner et Leeb.

Théorème 5 (Pansu, [Pan83] et [Pan89b])**.** *Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. Alors tout cône asymptotique de G est le groupe de Lie $\mathrm{gr}(G)$ muni d'une distance sous-finslérienne invariante. De plus, si deux tels cônes asymptotiques sont bilipschitziens, alors leurs groupes de Lie sous-jacents sont isomorphes.*

Théorème 6 (Kleiner-Leeb, [KL97])**.** *Soit G un groupe de Lie semi-simple (sans facteur compact, de centre trivial). Soit r son rang réel. Alors, tout cône asymptotique de G est un immeuble euclidien. De plus, lorsque leur rang réel est $\geqslant 2$, les homéomorphismes bilipschitziens entre de tels immeubles sont des homothéties.*

7. Au plan historique, il y a là une parenté lointaine avec l'observation d'Élie Cartan (faite avant même que la cohomologie de de Rham ne soit définie), qu'on peut retrouver les nombres de Betti d'un groupe de Lie *compact* dans son algèbre de Lie [Car30].

En fait, les quasiisométries constituent la plus grande classe d'applications induisant des isomorphismes aux des cônes asymptotiques, au sens suivant, à partir duquel apparaît la notion plus générale d'équivalence sous-linéaire centrale à mon travail :

Proposition – Définition 2. Soit X et Y des espaces métriques géodésiques.

(QI) ([Pal21]) L'application $\phi : X \to Y$ est une quasiisométrie si et seulement si, entre chaque paire de cônes asymptotiques avec des facteurs d'échelle égaux de X et Y, ϕ est soit complètement non-définie, soit induit un homéomorphisme. De plus, cet homéomorphisme est bilipschitzien, et ses constantes de Lipschitz et d'expansion ne dépendent pas de la paire de cônes choisis.

(SBE) (Cornulier, [Cor11]) $f : X \to Y$ est une équivalence sous-linéairement bilipschitzienne si elle induit un homéomorphisme bilipschitzien entre chaque paire de cônes asymptotiques pointés avec des facteurs d'échelle égaux.

Concrètement, une application $\phi : (X, o_X) \to (Y, o_Y)$ entre des espaces métriques pointés réalise une équivalence sous-linéairement bilipschitzienne (que j'abrègerai dans ce résumé en équivalence sous-linéaire) s'il existe $\kappa \geqslant 1$ et une fonction sous-linéaire v telle que pour chaque r suffisamment grand

$$-v(r) + \frac{d_X(x, x')}{\kappa} \leqslant d_Y(\phi(x), \phi(x')) \leqslant \kappa d_X(x, x') + v(r) \tag{1}$$

$$d_Y(y, \phi(x)) \leqslant v(r), \tag{2}$$

pour tous les $x, x' \in B(o_X, r)$ et $y \in B(o_Y, r)$.

On peut noter que ϕ est une quasiisométrie si et seulement si v peut être pris borné (auquel cas la caractérisation ci-dessus se réduit à la Définition 1). Un raffinement quantitatif est le suivant.

Définition 3. Soit u une fonction sous-linéaire croissante ; supposons de plus qu'elle soit doublante (c'est-à-dire que $\limsup u(2r)/u(r) < +\infty$). Une $O(u)$-équivalence est telle que l'on peut prendre $v = cu$ dans la caractérisation précédente.

Cornulier a varifié qu'étant donnée une fonction u comme ci-dessus les espaces métriques munis des $O(u)$-équivalences forment une catégorie [Cor19].

L'intérêt initial était le calcul des cônes asymptotiques. Grâce au Théorème 5 et au Théorème 6, ceux-ci étaient connus dans le cas des groupes de Lie semi-simples ou nilpotents lorsque Cornulier a tenté de donner une description partielle du cas général [Cor08], avec pour objectif initial de calculer uniquement les dimensions topologiques des cônes. Ce faisant, Cornulier a trouvé un théorème de réduction, qu'il a extrait et reformulé en termes d'équivalence sous-linéaires : [Cor11, Theorem 1.2].

Ceci a soulevé les questions suivantes, au début de ma thèse.

Question 1. Quels invariants de quasiisométrie sont des invariants d'équivalence sous-linéaire ? En particulier, peuvent-ils distinguer les objets traditionnels de la théorie géométrique des groupes à équivalence sous-linéaire près ?

Cette question peut être soulevée en particulier pour les groupes de Lie, où les réponses positives doivent être considérées comme réciproque du théorème principal de [Cor11].

Question 2. Les équivalences sous-linéaires ont-elles certaines des propriétés de rigidité connues pour les quasiisométries ?

Question 3. Entre des espaces auto-similaires (par exemple des espaces de Banach ou des groupes de Carnot), les isométries approchées sont-elle proches d'isométries ? (je donnerai une formulation précise plus loin).

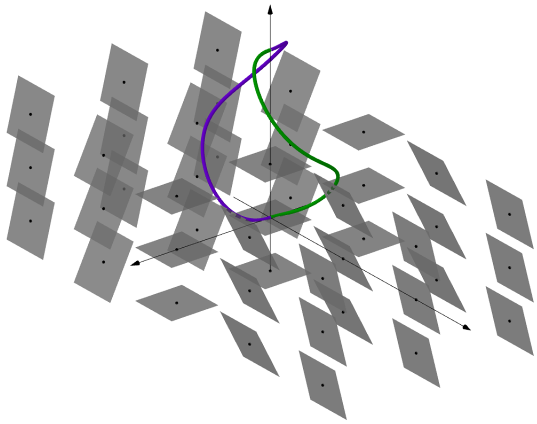

FIGURE 2. Un groupe de Carnot est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe avec une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\delta \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{g}_1 = \ker(\delta - 1)$ Lie engendre $\mathfrak{g}$. Les automorphismes $e^{\delta t}$ sont des échelles d'une métrique subFinsler à distribution horizontale $\mathfrak{g}_1$ (généralisant les homothéties d'un espace vectoriel normé). Par le théorème 5 les cônes asymptotiques des groupes à croissance polynomiale sont de telles métriques. Deux segments géodésiques dans le groupe de Heisenberg sont colorés.

3. Groupes nilpotents

Restreignant la Question 1 aux groupes nilpotents, Cornulier a fait les observations suivantes : la classification des groupes nilpotents à équivalence sous-linéaire près se réduit à l'isomorphismes du groupe gradué associé. En particulier, la classification à quasiisométrie près doit être plus fine d'après le Théorème 2. Cela n'épuise pas tout l'intérêt de la question, mais la rend plutôt quantitative [Cor19, 6.E]. Soyons plus précis.

Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. On munit G et $\operatorname{gr}(G)$ (dont on rappelle qu'il a été défini par (gr)) de distances géodésiques propres invariantes à gauche (par exemple, riemanniennes), et on pose

$$\underline{e}_G := \inf\{e \in [0,1) : \exists \phi : G \to \operatorname{gr}(G) \text{ qui est une } O(r^e)\text{-équivalence}\}.$$

On peut donner une majoration de $\underline{e}_G$ strictement inférieure à 1 qui ne dépend que de la structure de G [Cor19, 6]. En partant de l'observation que le type de croissance d'une *fonction de Dehn* δ_G (ou fonction isopérimétrique ; voir la Figure 3) de G est un invariant de quasiisométrie de G, on peut prouver que les équivalences de $O(r^e)$-bilipschitz avec de petits exposants ne le changeront pas beaucoup. Cette stratégie a été mise en œuvre avec succès en collaboration avec C. Llosa Isenrich et R. Tessera.

Théorème 7 ([IPT20, Theorem A]). *Soit $d \geqslant 4$. Soit G le groupe nilpotent tel que*

$$\mathfrak{g} = \left(\mathbf{R}[t]/(t^{d-1}) \times \mathbf{R}[s]/(s^{d-2}) \rtimes \langle \partial_t, \partial_s \rangle\right)/\mathfrak{r}$$

où $\mathfrak{r}$ est l'idéal central représenté par des paires de fonctions polynomiales constantes et égales. Alors, $\delta_G(n) \asymp n^{d-1}$ tandis que $\delta_{\operatorname{gr}(G)}(n) \asymp n^d$.

Ce théorème s'accompagne d'estimées sur le diamètre nécessaire pour effectuer une homotopie vers le lacet trivial pour les lacets contractiles d'une longueur donnée. Cette forme améliorée du théorème implique le renforcement suivant du Théorème 1 pour cette paire de groupes.

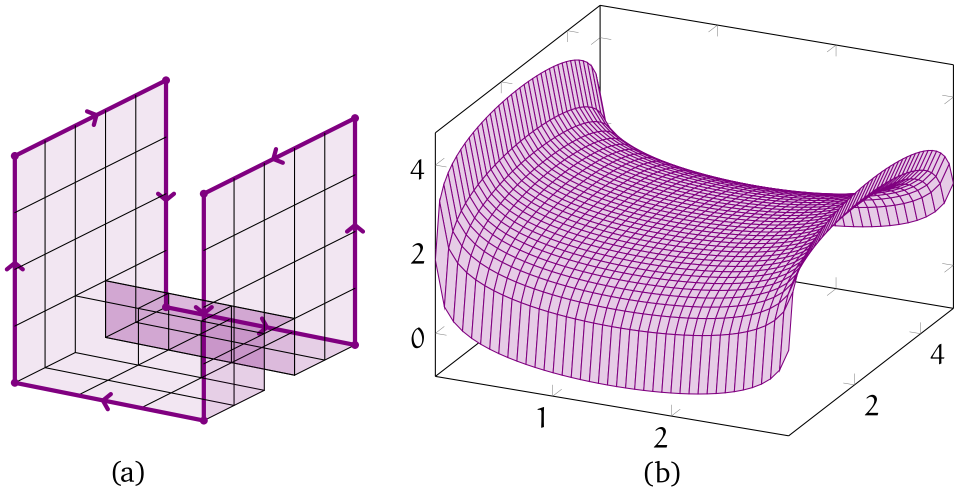

FIGURE 3. (a) Disque combinatoire non-minimal remplissant le lacet correspondant au mot $Z^4Y^5Z^{-4}X^3Z^4Y^{-5}Z^{-4}X^{-3} = 0$ dans $\mathbf{Z}^3 = \langle X, Y, Z \mid [X, Y], [Y, Z], [Z, X] \rangle$. (b) Solution du problème de Plateau dans $\mathbf{R}^3$ euclidien. La fonction de Dehn, qui est quadratique dans le cas de $\mathbf{Z}^3$, a une manifestation combinatoire (nombre de relateurs à appliquer pour réduire un mot qui représente l'élément neutre au mot trivial) et une manifestation géométrique dans les modèles du groupe (aire de remplissage).

Corollaire 1 ([IPT20, Theorem C]). *Soit* G *comme ci-dessus. Alors* $\underline{e}_G \geqslant 1/(2d-1)$.

La majoration de $\underline{e}_G$ évoquée plus haut est obtenue par une seule application $\phi : G \to \mathrm{gr}(G)$, et tend vers 1 quand $d \to +\infty$. Il pourrait être utile d'étudier d'autres applications ϕ, éventuellement dans l'esprit de [SS18], pour comprendre si la borne du corollaire est optimale quand $d \to +\infty$.

Le Théorème 7 est surprenant d'une certaine manière. La preuve de la majoration de la fonction isopérimétrique donnée dans [IPT20] est algorithmique, c'est-à-dire que nous réduisons les lacets homotopes au lacet trivial en utilisant une procédure spécifique dont l'interprétation géométrique n'est pas facile. Les lacets dans G et gr(G) qui sont les plus difficiles à remplir sont les mêmes (en coordonnées exponentielles). Les relateurs supplémentaires dans G (par rapport à gr(G)) aident d'une certaine manière, mais ils disparaissent au cône asymptotique. Ainsi, les grands disques combinatoires de remplissage dans G les utilisent, mais seulement à une échelle donnée, moyenne, qui est grande par rapport à 1 mais petite par rapport à la longueur des boucles à remplir. Voici une question dans ce sens.

Question 4. Peut-on donner un sens à une limite des remplissages renormalisés dans G ? Si oui, quels sont les objets limite auxquels on peut s'attendre dans gr(G) ?

Une classe de candidats pour les objets limites peut être les disques plongés récemment construits par Wenger et Young dans les groupes de Carnot [WY18].

4. Espaces symétriques ou homogènes de courbure négative

4.1. **Espaces symétriques et analyse au bord.** Les espaces symétriques de rang supérieur sont connus pour avoir des cônes asymptotiques (à savoir des immeubles euclidiens épais) qui sont en principe distinguables à homéomorphisme bilipschitzien près, comme cela a été annoncé dans [KT04].

Les groupes de rang un sont différents, cependant. Pour ces derniers, la classification à quasiisométrie près a lieu pour des raisons qui étaient déjà comprises en 1970 [Mos71]. En langage moderne, classer les espaces symétriques de rang un de type non compact revient à demander : dans quelle mesure la frontière de Gromov est préservée par équivalence sous-linéaire ? Cornulier a prouvé que deux espaces hyperboliques de Gromov géodésiques propres ont des frontières de Gromov bihölderiennes. En revanche, la structure quasi-conforme n'est pas invariante par SBE, car elle est équivalente au type de quasi-isométrie du cône hyperbolique ([BS00], [Roe03]). La recherche d'une structure invariante a conduit aux résultats suivants.

Théorème 8 (Reformulation de [Pal20a, Theorem 1]). *Les équivalences $O(u)$-bilipschitziennes entre des espaces hyperboliques géodésiques propres induisent des applications au bord qui sont biHölder et sublinéairement quasisymétriques.*

La notion d'homéomorphisme sous-linéairement quasi-symétrique est nouvelle, introduite dans [Pal20a]. Elle signifie que l'asphéricité de petites boules ou anneaux peut être perturbée d'une quantité qui dépend au plus de façon sous-linéaire du logarithme de leur diamètre. Cette notion ne devient maniable que lorsqu'elle est combinée à la bihölderianité. Dans [Pal20a], ces deux caractéristiques sont exprimées au moyen du birapport, et les applications au bord de Gromov sont appelées “sous-linéairement quasiMöbius”.

Corollaire 2 ([Pal20a, Theorem 2]). *Soit G et H des groupes de Lie simples à centre trivial et sans facteurs compacts, de rang réel un. S'il existe une $O(u)$-équivalence entre G et H, alors G et H sont isomorphes.*

L'étude détaillée des homéomorphismes sous-linéairement quasi-symétriques reste pour l'essentiel à faire ; comme point de départ, il est utile de chercher des analogues des propriétés des homéomorphismes quasisymétriques fournies par la théorie géométrique de la mesure. Dans cette direction, j'ai fait les deux constats suivants :

(1) Les homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques n'ont pas la propriété d'absolue continuité selon presque toutes les lignes [Pal20b, Appendix A]. La famille d'exemple construits pour nier cette propriété est différentiable presque partout, mais sa différentielle est nulle presque partout. Ceci indique qu'on ne doit pas s'attendre à trouver ne serait-ce qu'un point où la différentielle est un isomorphisme, et mener ainsi une stratégie telle que dans [Pan89b] ou [Sch95].
(2) Toutefois, il s'avère que les constructions de modules combinatoires utilisées dans la version originale de la dimension conforme de Pansu, dans un sens modifié, peuvent être effectuées pour les homéomorphismes sous-linéairement quasisymétriques, et une modification adéquate de la dimension conforme de Pansu fournit une réponse numérique positive à la Question 1 dans un cadre plus général que celui de [Pal20a] qui était pour la plupart destiné à distinguer les espaces symétriques de type non compact de rang un. Je décris quelques applications à présent.

4.2. **Espaces homogènes.**

Définition 4. Un groupe de Heintze [8] est un groupe de Lie de la forme $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$, où N est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et α est une dérivation dont les valeurs propres n'ont que des parties réelles positives. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\inf\{\Re\lambda : \lambda \in \mathrm{Sp}(\alpha)\} = 1$.

Heintze a prouvé que les groupes ci-dessus sont les seuls à porter des métriques riemanniennes à courbure négative [Hei74]. Au cours des 30 dernières années, de nombreuses techniques ont été développées afin d'aborder la classification quasiisométrique et la description plus précise des quasi-isométries entre ces groupes [Pan89a, Xie15, Xie14, CP17, CPS17]. Concernant la classification à équivalence sous-linéaire près, voici la principale application de [Pal20b].

8. Avant le théorème de Heinze de 1974, ceux-ci étaient appelés HMN, Homogeneous manifolds of Negative Curvature. Heintze a prouvé que les métriques invariantes à gauche sur les groupes de Heintze sont en fait toutes les HMN.

Théorème 9 ([Pal20b])**.** *Soit v une fonction sous-linéaire doublante. Si $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ et $N' \rtimes_{\alpha'} \mathbb{R}$ sont des groupes de Heintze équivalents à $O(v)$-bilipschitz avec une dérivation normalisée purement réelle, alors les dimensions de N et N', et les traces de α et α' sont égales. De plus, si N et N' sont abéliens, alors les polynômes caractéristiques de α et α' sont égaux.*

Remarque. Cela implique que la classification à équivalence sous-linéaire près des groupes de Heintze dont le nilradical est abélien est complètement décrite par [Cor11, 1.2].

4.3. **Equivalences sous-linéaire et (non-)rigidité en courbure < 0.** Dans toute cette section, u est une fonction sous-linéaire doublante telle que dans la Définition 3.

Théorème 10 ([Pal21, Theorem C])**.** *Soit G un groupe de Lie, $n \geqslant 2$ un entier. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *G est $O(u)$-bilipschitz équivalent à $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$.*

(2) *G est $O(\log)$-bilipschitz équivalent à $\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$.*

(3) *Pour chaque $\varepsilon > 0$, G agit de manière continue proprement co-compacte par isométries sur une variété riemannienne complète de dimension n avec $-1 \leqslant K \leqslant -1+\varepsilon$.*

De plus, si G est complètement résoluble, les conditions précédentes sont équivalentes à :

(4) *L'algèbre $\mathfrak{g}$ dégénère vers une (la) sous-algèbre complètement résoluble maximale $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{o}(n,1)$.*

(5) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ se décompose en $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \oplus \mathbf{R}A$, où $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est abélien et ad_A est unipotent sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.*

Dire que $\mathfrak{g}$ dégénère vers $\mathfrak{b}$ dans (4) signifie que la clôture de Zariski de l'orbite de $\mathfrak{g}$ dans la variété des lois des algèbres de Lie contient $\mathfrak{b}$. Le Théorème 10 admet le corollaire suivant, dont l'hypothèse est de nature géométrique et la conclusion de nature topologique.

Corollaire 3 ([Pal21])**.** *Si un groupe de Lie G possède des modèles riemanniens dont le pincement est arbitrairement proche de -1, alors sa couronne de Higson sous-linéaire $\nu_L G$ est homéomorphe à celle d'un espace hyperbolique réel.*

La couronne de Higson sous-linéaire dont il est question dans le corollaire est une compactification particulière [DS07, DH08]. Elle reste relativement peu étudiée, mais T. Fukaya a pu vérifier sur l'exemple de l'espace euclidien que sa topologie semble moins exotique que celle de la compactification de Higson usuelle [Kee94, Fuk12]. En courbure positive pour les variétés compactes, il est bien connu que des hypothèses même bien plus faibles sur le pincement autour de 1 ont des conséquences bien plus fortes sur la topologie [Ber59, Ber60, Kli62].

5. Quasiisométries, isométries approchées et stabilité

5.1. **Groupes dont les distances sont quasisimilaires.** Ce qui suit décrit un travail conjoint en préparation actuellement (mars 2022) avec E. Le Donne et X. Xie.

Définition 5. Une quasiisométrie $\phi \colon X \to Y$ est une *quasisimilarité* s'il existe $\lambda > 0$ (appelé rapport de quasisimilarité) et $c \geqslant 0$ tels que pour tous $(x, x') \in X^2$,

$$\lambda d(x,x') - c \leqslant d(\phi(x), \phi(x')) \leqslant \lambda d(x,x') + c. \tag{QS}$$

Si de plus $\lambda = 1$ on dit que ϕ est une *isométrie approchée*.

Nous mettons en évidence une propriété, partagée par une famille de groupes de Lie connexes réslubles, qui consiste dans le fait que toutes les distances riemanniennes invariantes à gauche sont quasi-similaires les unes aux autres.

Théorème 11 (avec Le Donne and Xie)**.** *Soit G un groupe de Lie résoluble simplement connexe avec les propriétés suivantes :*

— *N=[G,G] est de codimension* 1 *dans* G
— *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{n}$ *se décompose sous la forme* $\mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$ *avec* $[\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-] = 0$ *et l'action adjointe de* $\mathfrak{g}$ *est dilatante sur* $\mathfrak{n}^+$ *et contractante sur* $\mathfrak{n}^-$.

Alors, toutes les métriques riemanniennes invariantes à gauche sur G *sont quasisimilaires entre elles via l'identité.*

Un groupe bien connu où s'applique le théorème est le groupe tridimensionnel SOL (avec $\mathfrak{n}^+$ et $\mathfrak{n}^-$ de dimension 1).

Lorsqu'elle se présente, cette propriété permet parfois mais pas toujours une manifestation affaiblie de la rigidité des quasi-isométries : les quasi-isométries de ces groupes sont des isométries approchées, bien que pas nécessairement à distance bornée des isométries, affirmation qui n'a pas de sens pour un groupe dont toutes les distances ne seraient pas auto-similaires. Voici un exemple de théorème reformulé à l'aide de ce principe.

Théorème 12 (Reformulation d'un théorème de [EFW12, EFW13]). *Toute quasiisométrie du groupe de Lie SOL vers lui-même est une isométrie approchée, ceci quelle que soit la métrique riemannienne invariante à gauche choisie.*

Disons qu'un groupe localement compact compactement engendré à la *propriété des modèles quasisimilaires* si pour toute paire de modèles $G \curvearrowright X$ et $G \curvearrowright Y$ de G, l'application orbitale de X vers Y est une quasisimilarité. Cette propriété passe à l'enveloppe [9] co-compacte et au quotient par un sous-groupe normal compact. Elle ne passe pas aux réseaux : $SL(2, \mathbf{R})$ l'a mais les groupes de surface de genre $\geqslant 1$ ne l'ont pas ; ceci est lié au fait que leur abélianisé est de rang supérieur, on peut s'en servir pour construire des métriques de mots qui ne sont pas quasisimilaires. En fait, nos techniques ne permettent actuellement de montrer la propriété des modèles quasisimilaires que pour certains groupes de Lie comme dans les hypothèses du théorème 11 (qui l'énonce seulement pour les modèles riemanniens munis d'actions simplement transitive) et d'autres qui leurs sont proches, mais n'est en général pas efficace pour les groupes de type fini (hors les virtuellement cycliques).

Question 5. Soit G l'un des groupes suivants

(1) $G = (\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p) \rtimes_{(p,p^{-1})} \mathbf{Z}$ (enveloppe du groupe d'allumeur de réverbère $\mathbf{Z}_p \wr \mathbf{Z}$).
(2) $G = (\mathbf{Z}_p \times \mathbf{R}) \rtimes_{(p,p)} \mathbf{Z}$ (enveloppe du groupe de Baumslag-Solitar résoluble $BS(1,p)$).
(3) Un réseau du groupe de Lie SOL.
(4) Un réseau (uniforme) de $Sp(1,n)$ ou $F_4^{(-20)}$.

G a-t-il la propriété des modèles quasisimilaires ?

Voici quelques raisons de penser que la réponse pourrait être oui dans le cas (4). Pour un réseau Γ de $Sp(1,n)$ ou $F_4^{(-20)}$, il se produit une annulation de $H^1(\Gamma, \mathbf{R})$ qu'on peut considérer comme une manifestation de la propriété (T) (Voir par exemple [Sha00, Theorem 0.1]). A l'inverse, les réseaux des autres groupes de rang un ont la propriété opposée de Haagerup, n'ont pas cette annulation et ont de grands quotients abéliens, qui permettent de construire des modèles non quasisimilaires comme on l'a signalé plus haut pour les groupes de surface. De plus, la rigidité quasiisomérique est plus forte dans le cas des réseaux uniformes de $Sp(1,n)$ et $F_4^{(-20)}$: leur groupe de quasiisométries est de dimension finie [Pan89b], on dit qu'il y a rigidité des quasiisométries.

5.2. **Stabilité des isométries approchées et sous-linéaires.** Cette section est complémentaire de la précédente, mais elle est exclusivement formée de questions pour le moment. On dit d'une application ϕ entre espace métriques qu'elle est un *plongement quasiisométrique* si seule la première condition de la Définition 1 est vérifiée. Si de plus $\kappa = 1$, on

9. Par enveloppe de Γ j'entends un groupe G dans lequel Γ admet un plongement propre et co-compact.

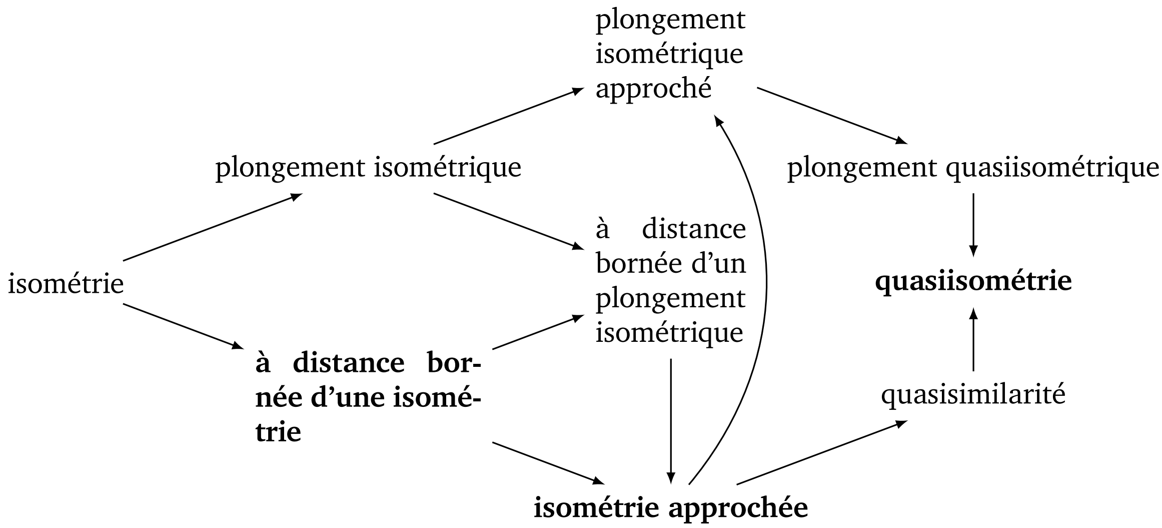

FIGURE 4. Quelques propriétés des applications entre espaces métrique. On dit qu'il y a rigidité des quasiisométries d'un espace X quand les quasiisométries de X sont à distance bornée d'isométrie de X. C'est un phénomène de rigidité très fort, qui peut servir à démontrer la rigidité quasiisométrique d'un groupe [Pan89b, KL97]. Les §5.1 et §5.2 s'occupent d'essayer de dégager d'autres réciproques partielles.

parle de plongement isométrique approché, et si le terme d'erreur c est remplacé par une fonction sous-linéaire u, je la qualifierai ici de plongement $O(u)$-isométrique (la dernière notion est dans la littérature mais sans terminologie dominante). Quelques-unes de ces notions sont exposées sur la Figure 4.

Les plongements quasi-isométriques entre espaces euclidiens peuvent être très “sauvages” (Voir [KL97]). Cependant, les plongements isométriques approchés, et même les plongement $O(u)$-isométriques entre espaces euclidiens, sont beaucoup plus rigides :

Théorème 13 (Hyers-Ulam [HU45] pour les espaces de Hilbert, Gevirtz [Gev83] pour le cas général)**.** *Soit X un espace de Banach, soit $\phi : X \to X$ une isométrie approchée. Alors f est à distance bornée d'une isométrie (donc* [10] *d'un isomorphisme linéaire).*

Théorème 14 (reformulation et consequence de [RX02])**.** *Soit X un espace de Banach réel, soit $e \in [0,1]$. Soit Y un $L^q(\mu)$ avec $q < 2$ ou un espace de Hilbert. Soit $f : X \to Y$ est un plongement $O(r^e)$- isométrique. f est $O(r^{(e+1)/2})$ proche d'une isométrie (unique).*

En comparant le Théorème 13 et le Théorème 14 nous observons que la généralisation au cadre sous-linéaire permet d'abandonner l'hypothèse de quasisurjectivité. De surcroît, il existe des plongements isométriques approchés $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ qui ne peuvent pas être étendus en isométries approchées $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, mais toute $O(r^e)$-isométrie $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ s'étend à une isométrie $O(r^{e'})$ $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (avec $e' = (e+1)/2$). Il reste des questions connexes à étudier :

Question 6. Existe-t-il $e \in [0,1)$ tel que si $\phi : \mathbb{R} \to N$ est un plongement isométrique approché dans un groupe de Carnot, alors ϕ est $O(r^e)$-proche d'une isométrie ?

Question 7. Soit $\phi : N \to N'$ un plongement isométrique approché entre groupes de Carnot munis de métrique de Carnot-Carathéodory. ϕ est-elle $O(r^e)$-proche d'un

10. D'après un théorème de Mazur et Ulam qui est beaucoup plus célèbre que le Théorème 13, les isométries d'un espace de Banach sont affines.

6. Bords de Morse et équivalences sous-linéaires

La frontière de Morse, ou bord de Morse, d'un espace géodésique propre a été introduite dans la thèse de M. Cordes en s'appuyant sur la construction antérieure de R. Charney et H. Sultan de la frontière contractante d'un espace CAT(0). Il s'agissait à l'origine d'outils pour distinguer les groupes d'Artin à angle droit à quasiisométrie près (pour les espaces CAT(0), la frontière de Morse et la frontière contractante coïncident).

Depuis, Qing, Rafi et Tiozzo ont construit une variante, appelée frontière de Morse sous-linéaire [QRT19, QRT20], et qui a notamment l'avantage d'être une réalisation du bord de Poisson pour les groupes modulaires de surface. Qing m'a posé la question suivante début 2021 :

Question 8. Soient X et Y deux espaces géodésiques propres, et $\phi\colon X \to Y$ une équivalence sous-linéaire. ϕ induit-elle une application bijective (voire un homéomorphisme) entre les bords de Morse sous-linéaires $\partial_{\mathrm{Morse}} X \to \partial_{\mathrm{Morse}} Y$?

Si ϕ est une quasiisométrie, la réponse est positive d'après [QRT20] et si X et Y sont Gromov-hyperboliques, la réponse est positive d'après [Pal20a]. Nos travaux en cours montrent qu'on peut obtenir une réponse positive à la Question, en changeant légèrement la construction de Qing, Rafi et Tiozzo mais avec le même résultat dans le cas des groupes modulaires de surfaces.

7. Géométrie asymptotique des feuilletages et géométrie aléatoire

Il s'avère que les groupes et leurs actions géométriques ne sont pas les seuls objets d'intérêt pour la géométrie à grande échelle.

Théorème 15 (Cantrell et Furman, [CF17])**.** *Soit Γ un groupe finiment engendré, virtuellement nilpotent. Soit G un groupe nilpotent simplement connexe tel que Γ est virtuellement un treillis dans G. Que Γ agisse de manière ergodique, en préservant la mesure, sur un espace de mesure (X, m). Soit $\{d_x : x \in X\}$ une famille de métriques géodésiques à grande échelle sur Γ avec les propriétés suivantes :*

(i) $d_x(\gamma_1, \gamma_2) = d_{\gamma.x}(\gamma_1\gamma^{-1}, \gamma_2\gamma^{-1})$

(ii) *il existe une métrique invariante d sur Γ tel que d_x/d est encadré par des constantes positives.*

Alors, il existe une métrique sous-finslerienne invariante à droite d_ϕ sur le groupe G_∞ avec une algèbre de Lie $\mathrm{gr}(\mathrm{Lie}\, G)$ telle que (G, d_ϕ) est le cône asymptotique de (Γ, d_x) pour m-presque chaque x.

L'invariance à droite inhabituelle des métriques dans l'énoncé est due au fait que ce théorème bénéficie d'un apport important de la théorie ergodique. La première partie du Théorème 5 de Pansu (celle qui décrit le cône asymptotique) est récupérée lorsque m est atomique.

Question 9. Les distances d_x comme dans les hypothèses du théorème $(1, O(u))$ sont-elles SBE ? Si oui, pour quelle fonction u ?

Question 10. Soit $H < L$ une paire de groupes nilpotents simplement connexes, Λ un réseau dans L. Equipons L d'une distance riemannienne. Fixons (X, m) le quotient L/Λ, et laissons H agir par multiplication à gauche sur X. Supposons que cette action soit ergodique [11], et pour $x \in X$, fixons d_x la distance riemannienne sur H donnée en l'identifiant avec la feuille Hx dans L. La conclusion du théorème 15 est-elle valable ?

11. Il existe un critère pour cela, dû à Flaminio et Forni [FF06].

Références

[Aus16] Tim Austin. Integrable measure equivalence for groups of polynomial growth. *Groups Geom. Dyn.*, 10(1) :117–154, 2016. With Appendix B by Lewis Bowen.

[Ber59] Marcel Berger. Variétés riemanniennes à courbure positive. *Bull. Soc. Math. France*, 87 :285–292, 1959.

[Ber60] M. Berger. Les variétés Riemanniennes $(1/4)$-pincées. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)*, 14 :161–170, 1960.

[BKMM12] Jason Behrstock, Bruce Kleiner, Yair Minsky, and Lee Mosher. Geometry and rigidity of mapping class groups. *Geom. Topol.*, 16(2) :781–888, 2012.

[BP03] Marc Bourdon and Hervé Pajot. Cohomologie l_p et espaces de Besov. *J. Reine Angew. Math.*, 558 :85–108, 2003.

[BR18] Uri Bader and Christian Rosendal. Coarse equivalence and topological couplings of locally compact groups. *Geom. Dedicata*, 196 :1–9, 2018.

[BS00] M. Bonk and O. Schramm. Embeddings of Gromov hyperbolic spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 10(2) :266–306, 2000.

[Car30] E. Cartan. Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces. *Ann. Soc. Polon. Math.*, 8 :181–225, 1930.

[CCMT15] Pierre-Emmanuel Caprace, Yves Cornulier, Nicolas Monod, and Romain Tessera. Amenable hyperbolic groups. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(11) :2903–2947, 2015.

[CdlH16] Yves Cornulier and Pierre de la Harpe. *Metric geometry of locally compact groups*, volume 25 of *EMS Tracts in Mathematics*. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2016. Winner of the 2016 EMS Monograph Award.

[CF17] Michael Cantrell and Alex Furman. Asymptotic shapes for ergodic families of metrics on nilpotent groups. *Groups Geom. Dyn.*, 11(4) :1307–1345, 2017.

[Cor08] Yves Cornulier. Dimension of asymptotic cones of Lie groups. *J. Topol.*, 1(2) :342–361, 2008.

[Cor11] Yves Cornulier. Asymptotic cones of Lie groups and cone equivalences. *Illinois J. Math.*, 55(1) :237–259 (2012), 2011.

[Cor15] Yves Cornulier. Commability and focal locally compact groups. *Indiana Univ. Math. J.*, 64(1) :115–150, 2015.

[Cor18] Yves Cornulier. On the quasi-isometric classification of locally compact groups. In *New directions in locally compact groups*, volume 447 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 275–342. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2018.

[Cor19] Yves Cornulier. On sublinear bilipschitz equivalence of groups. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 52(5) :1201–1242, 2019.

[CP17] Matias Carrasco Piaggio. Orlicz spaces and the large scale geometry of Heintze groups. *Math. Ann.*, 368(1-2) :433–481, 2017.

[CPS17] Matias Carrasco Piaggio and Emiliano Sequeira. On quasi-isometry invariants associated to a Heintze group. *Geom. Dedicata*, 189 :1–16, 2017.

[DH08] Jerzy Dydak and Jose Higes. Asymptotic cones and Assouad-Nagata dimension. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(6) :2225–2233, 2008.

[dlH00] Pierre de la Harpe. *Topics in geometric group theory*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.

[Dru02] Cornelia Druţu. Quasi-isometry invariants and asymptotic cones. *Internat. J. Algebra Comput.*, 12(1-2) :99–135, 2002. International Conference on Geometric and Combinatorial Methods in Group Theory and Semigroup Theory (Lincoln, NE, 2000).

[DS07] Alexander. N. Dranishnikov and Justin Smith. On asymptotic Assouad-Nagata dimension. *Topology Appl.*, 154(4) :934–952, 2007.

[Dym10] Tullia Dymarz. Large scale geometry of certain solvable groups. *Geom. Funct. Anal.*, 19(6) :1650–1687, 2010.

[Dyu00] Anna Dyubina. Instability of the virtual solvability and the property of being virtually torsion-free for quasi-isometric groups. *Internat. Math. Res. Notices*, (21) :1097–1101, 2000.

[EF10] Alex Eskin and David Fisher. Quasi-isometric rigidity of solvable groups. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume III*, pages 1185–1208. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[EFW12] Alex Eskin, David Fisher, and Kevin Whyte. Coarse differentiation of quasi-isometries I : Spaces not quasi-isometric to Cayley graphs. *Ann. of Math. (2)*, 176(1) :221–260, 2012.

[EFW13] Alex Eskin, David Fisher, and Kevin Whyte. Coarse differentiation of quasi-isometries II : Rigidity for Sol and lamplighter groups. *Ann. of Math. (2)*, 177(3) :869–910, 2013.

[Esk98] Alex Eskin. Quasi-isometric rigidity of nonuniform lattices in higher rank symmetric spaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 11(2) :321–361, 1998.

[FF06] Livio Flaminio and Giovanni Forni. Equidistribution of nilflows and applications to theta sums. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 26(2) :409–433, 2006.

[FM99] Benson Farb and Lee Mosher. Quasi-isometric rigidity for the solvable Baumslag-Solitar groups. II. *Invent. Math.*, 137(3) :613–649, 1999.

[FM00] Benson Farb and Lee Mosher. On the asymptotic geometry of abelian-by-cyclic groups. *Acta Math.*, 184(2) :145–202, 2000.

[Fuk12] Tomohiro Fukaya. Sublinear Higson corona of Euclidean cone. *Tsukuba J. Math.*, 36(1) :67–77, 2012.

[Gev83] Julian Gevirtz. Stability of isometries on Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 89(4) :633–636, 1983.

[GK21] Thomas Gotfredsen and David Kyed. Cohomological induction and uniform measure equivalence. *Fund. Math.*, 255(1) :19–49, 2021.

[Gro81] Mikhael Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (53) :53–73, 1981.

[Gro83] M. Gromov. Asymptotic geometry of homogeneous spaces. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, (Special Issue) :59–60 (1984), 1983. Conference on differential geometry on homogeneous spaces (Turin, 1983).

[Gro84] Mikhael L. Gromov. Infinite groups as geometric objects. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983)*, pages 385–392. PWN, Warsaw, 1984.

[Gro87] Mikhael L. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[Gro93] Mikhael L. Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, volume 182 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[Hei74] Ernst Heintze. On homogeneous manifolds of negative curvature. *Math. Ann.*, 211 :23–34, 1974.

[HK18] Jingyin Huang and Bruce Kleiner. Groups quasi-isometric to right-angled Artin groups. *Duke Math. J.*, 167(3) :537–602, 2018.

[HU45] D. H. Hyers and S. M. Ulam. On approximate isometries. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51 :288–292, 1945.

[IPT20] Claudio Llosa Isenrich, Gabriel Pallier, and Romain Tessera. Cone-equivalent nilpotent groups with different dehn functions, 2020.

[Kee94] James Keesling. The one-dimensional Čech cohomology of the Higson compactification and its corona. *Topology Proc.*, 19 :129–148, 1994.

[KKR21a] Juhani Koivisto, David Kyed, and Sven Raum. Measure equivalence and coarse equivalence for unimodular locally compact groups. *Groups Geom. Dyn.*, 15(1) :223–267, 2021.

[KKR21b] Juhani Koivisto, David Kyed, and Sven Raum. Measure equivalence for non-unimodular groups. *Transform. Groups*, 26(1) :327–346, 2021.

[KL97] Bruce Kleiner and Bernhard Leeb. Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (86) :115–197, 1997.

[Kli62] Wilhelm Klingenberg. Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nach oben beschränkter Krümmung. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 60 :49–59, 1962.

[KT04] Linus Kramer and Katrin Tent. Asymptotic cones and ultrapowers of Lie groups. *Bull. Symbolic Logic*, 10(2) :175–185, 2004.

[Mal51] Anatoly Ivanovich Malcev. On a class of homogeneous spaces. *Amer. Math. Soc. Translation*, 1951(39) :33, 1951.

[Mos71] George D. Mostow. The rigidity of locally symmetric spaces. pages 187–197, 1971.

[Mos09] Lee Mosher. Homology and dynamics in quasi-isometric rigidity of once-punctured mapping class groups. In *Geometric and cohomological methods in group theory*, volume 358 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 225–255. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.

[Nom54] Katsumi Nomizu. On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups. *Ann. of Math. (2)*, 59 :531–538, 1954.

[Pal20a] Gabriel Pallier. Large-scale sublinearly Lipschitz geometry of hyperbolic spaces. *J. Inst. Math. Jussieu*, 19(6) :1831–1876, 2020.

[Pal20b] Gabriel Pallier. Sublinear quasiconformality and the large-scale geometry of Heintze groups. *Conform. Geom. Dyn.*, 24 :131–163, 2020.

[Pal21] Gabriel Pallier. On the logarithmic coarse structures of lie groups and hyperbolic spaces, 2021.

[Pan83] Pierre Pansu. Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 3(3) :415–445, 1983.

[Pan89a] Pierre Pansu. Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 14(2) :177–212, 1989.

[Pan89b] Pierre Pansu. Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un. *Ann. of Math. (2)*, 129(1) :1–60, 1989.

[Pen11a] Irine Peng. Coarse differentiation and quasi-isometries of a class of solvable Lie groups I. *Geom. Topol.*, 15(4) :1883–1925, 2011.

[Pen11b] Irine Peng. Coarse differentiation and quasi-isometries of a class of solvable Lie groups II. *Geom. Topol.*, 15(4) :1927–1981, 2011.

[QRT19] Yulan Qing, Kasra Rafi, and Giulio Tiozzo. Sublinearly morse boundary i : Cat(0) spaces, 2019.

[QRT20] Yulan Qing, Kasra Rafi, and Giulio Tiozzo. Sublinearly Morse Boundary II : Proper geodesic spaces, 2020.

[Roe03] John Roe. *Lectures on coarse geometry*, volume 31 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[RX02] Themistocles M. Rassias and Shuhuang Xiang. On the stability of approximate isometries. *Tamsui Oxf. J. Math. Sci.*, 18(1) :45–56, 2002.

[Sau06] R. Sauer. Homological invariants and quasi-isometry. *Geom. Funct. Anal.*, 16(2) :476–515, 2006.

[Sch95] Richard Evan Schwartz. The quasi-isometry classification of rank one lattices. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (82) :133–168 (1996), 1995.

[Ser77] Jean-Pierre Serre. *Arbres, amalgames,* SL_2. Astérisque, No. 46. Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass.

[Sha00] Yehuda Shalom. Rigidity of commensurators and irreducible lattices. *Invent. Math.*, 141(1) :1–54, 2000.

[Sha04] Yehuda Shalom. Harmonic analysis, cohomology, and the large-scale geometry of amenable groups. *Acta Math.*, 192(2) :119–185, 2004.

[SS18] Betsy Stovall and Brian Street. Coordinates adapted to vector fields : canonical coordinates. *Geom. Funct. Anal.*, 28(6) :1780–1862, 2018.

[Tuk86] Pekka Tukia. On quasiconformal groups. *J. Analyse Math.*, 46 :318–346, 1986.

[vdDW84] Lou van den Dries and Alex James Wilkie. Gromov's theorem on groups of polynomial growth and elementary logic. *J. Algebra*, 89(2) :349–374, 1984.

[Wor07] Kevin Wortman. Quasi-isometric rigidity of higher rank S-arithmetic lattices. *Geom. Topol.*, 11 :995–1048, 2007.

[WY18] Stefan Wenger and Robert Young. Constructing Hölder maps to Carnot groups, 2018.

[Xie06] Xiangdong Xie. Quasi-isometric rigidity of Fuchsian buildings. *Topology*, 45(1) :101–169, 2006.

[Xie14] Xiangdong Xie. Large scale geometry of negatively curved $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$. *Geom. Topol.*, 18(2) :831–872, 2014.

[Xie15] Xiangdong Xie. Rigidity of quasi-isometries of HMN associated with non-diagonalizable derivation of the Heisenberg algebra. *Q. J. Math.*, 66(1) :353–367, 2015.