

# Comment jouer (et gagner) au morpion sur les surfaces ?

G. Pallier

Stage Animath Cachan 2016

# Principe du jeu classique

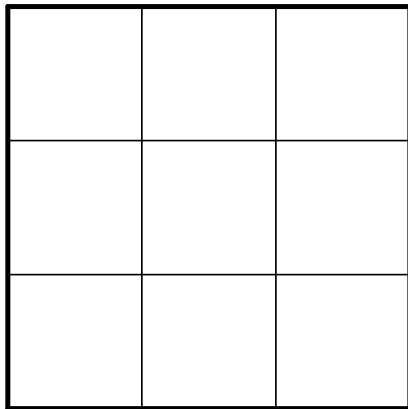


FIGURE 1 – Un plateau carré

## Principe du jeu classique

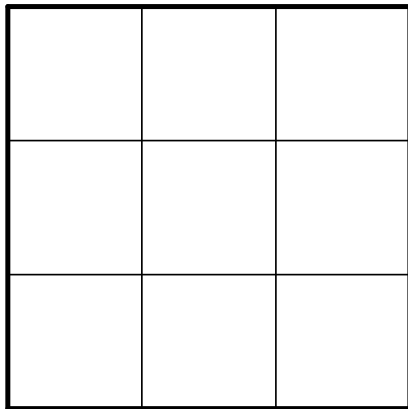


FIGURE 1 – Un plateau carré de  $3 \times 3 = 9$  cases.

## Principe du jeu classique

1	2	3
4	5	6
7	8	9

On peut les numéroter de 1 à 9.

## Principe du jeu classique

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Toutes les cases ne jouent pas le même rôle :

## Principe du jeu classique

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Il y a une case au centre (5)

## Principe du jeu classique

1	2	3
4	5	6
7	8	9

4 cases sur les côtés (2, 4, 6, 8),

## Principe du jeu classique

1	2	3
4	5	6
7	8	9

4 cases dans les coins (1, 3, 7, 9).

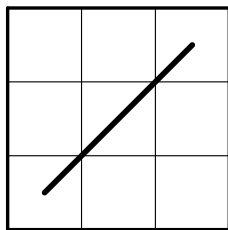
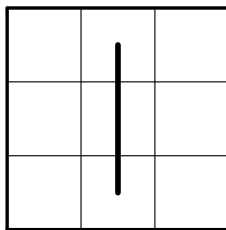
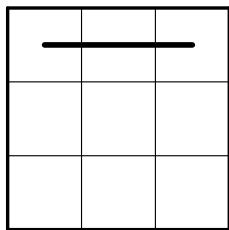


## Principe du jeu classique

Tour à tour, chacun des deux joueurs occupe la case de son choix.

## Principe du jeu classique

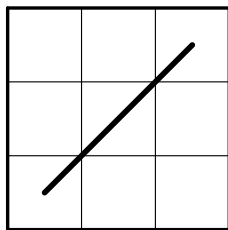
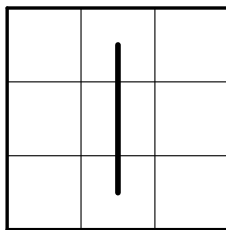
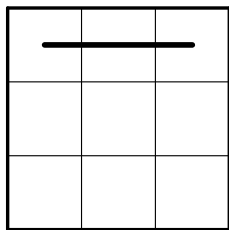
Tour à tour, chacun des deux joueurs occupe la case de son choix.



Le but est d'occuper 3 cases alignées (horizontalement, verticalement, ou en diagonale).

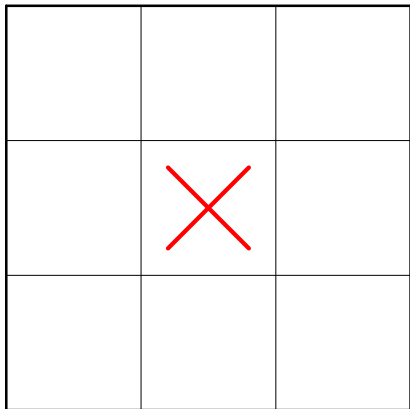
## Principe du jeu classique

Tour à tour, chacun des deux joueurs occupe la case de son choix.

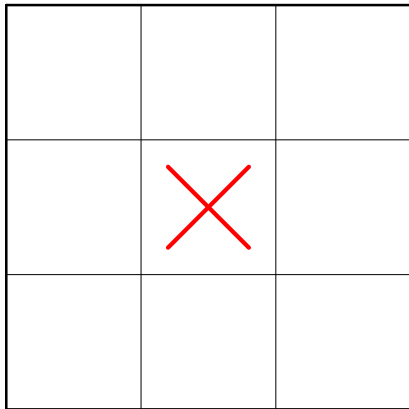


Le but est d'occuper 3 cases alignées (horizontalement, verticalement, ou en diagonale).

# Stratégie

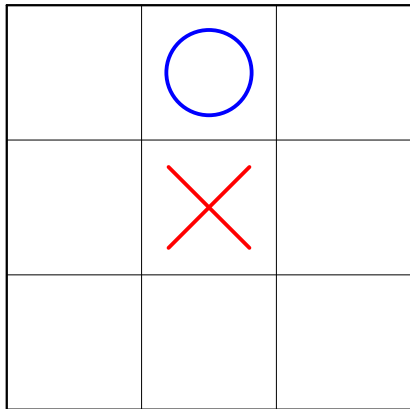


# Statégie



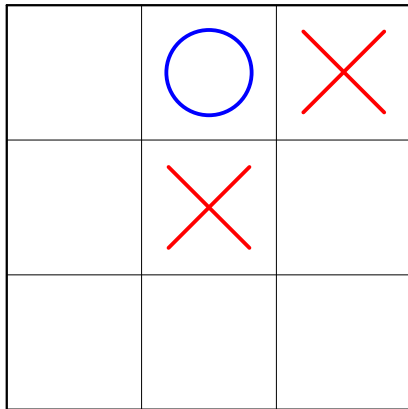
Un exemple : **X** commence au centre

# Statégie



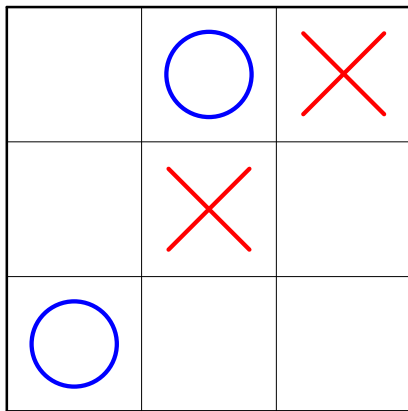
Au deuxième coup, **O** joue en haut.

# Stratégie



3ème coup.

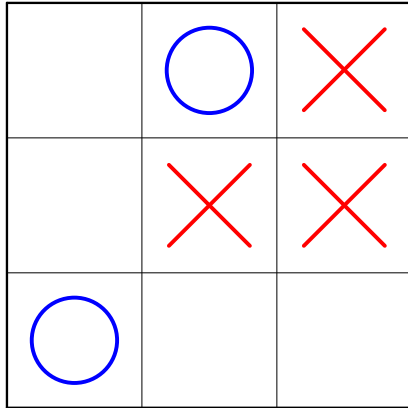
## Stratégie



4ème coup : **O** est obligé de jouer en bas à gauche.

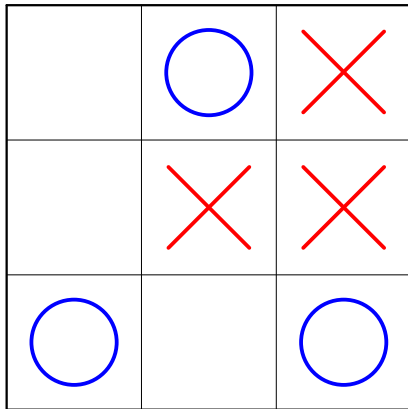


# Stratégie



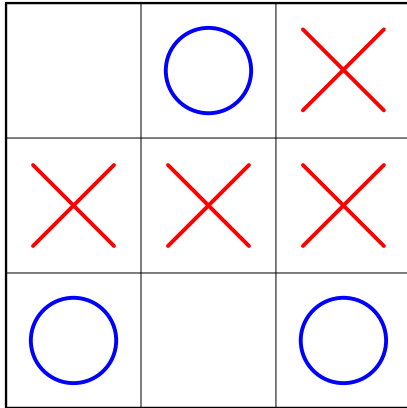
5ème coup.

# Stratégie



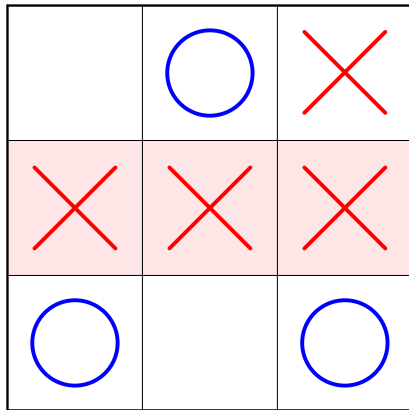
6ème coup.

# Stratégie



7ème coup.

# Stratégie



**X** a gagné.

# Stratégie

## Remarque

*A partir du 3ème coup, tous les coups de **O** étaient forcés.*

# Stratégie

## Remarque

*A partir du 3ème coup, tous les coups de **O** étaient forcés.*

On dit que, à partir du 3ème coup, **X** a suivi une stratégie, qui lui a permis de gagner quoi qu'il arrive (si il ou elle ne fait pas d'erreur).

# Stratégie

## Remarque

*A partir du 3ème coup, tous les coups de **O** étaient forcés.*

On dit que, à partir du 3ème coup, **X** a suivi une stratégie, qui lui a permis de gagner quoi qu'il arrive (si il ou elle ne fait pas d'erreur).

## Théorème

*Si **X** joue son premier coup en 5 et **O** joue son deuxième coup en 2, alors **X** possède une stratégie gagnante.*

# Stratégie

## Remarque

*A partir du 3ème coup, tous les coups de **O** étaient forcés.*

On dit que, à partir du 3ème coup, **X** a suivi une stratégie, qui lui a permis de gagner quoiqu'il arrive (si il ou elle ne fait pas d'erreur).

## Théorème

*Si **X** joue son premier coup en 5 et **O** joue son deuxième coup en 2, alors **X** possède une stratégie gagnante.*

## Remarque

*On peut remplacer 2 par 4, 6 ou 8 dans le théorème.*



# Stratégie

## Remarque

*A partir du 3ème coup, tous les coups de **O** étaient forcés.*

*On dit que, à partir du 3ème coup, **X** a suivi une stratégie, qui lui a permis de gagner quoiqu'il arrive (si il ou elle ne fait pas d'erreur).*

## Théorème

*Si **X** joue son premier coup en 5 et **O** joue son deuxième coup en 2, alors **X** possède une stratégie gagnante.*

## Remarque

*On peut remplacer 2 par 4, 6 ou 8 dans le théorème.*

## Question

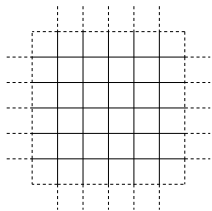
*Est-ce que dès le début de la partie, **X** possède une stratégie gagnante ?*

## Variante

Jusqu'à présent, le plateau de jeu avait des bords.

## Variante

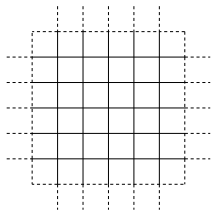
Jusqu'à présent, le plateau de jeu avait des bords. Comment faire pour les enlever ?



1. Un plateau infini ?

## Variante

Jusqu'à présent, le plateau de jeu avait des bords. Comment faire pour les enlever ?

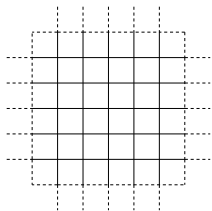


1. Un plateau infini ?



## Variante

Jusqu'à présent, le plateau de jeu avait des bords. Comment faire pour les enlever ?



1. Un plateau infini ?



2. On recolle les bords

## Le plateau infini

Si le but est d'aligner 9 pierres, alors **O a une stratégie permettant d'annuler la partie** (sur le plateau infini, mais aussi sur les plateaux finis).

## Le plateau infini

Si le but est d'aligner 9 pierres, alors **O a une stratégie permettant d'annuler la partie** (sur le plateau infini, mais aussi sur les plateaux finis).

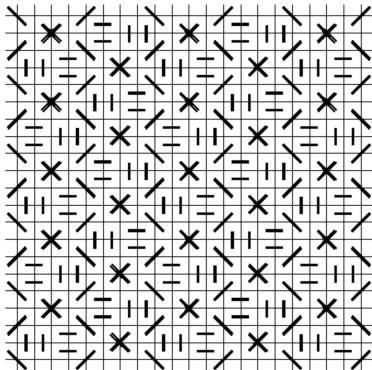


FIGURE 1 – La construction de Hales et Jewett

## Le plateau recollé

Il y a plusieurs manières différentes de recoller les bords.

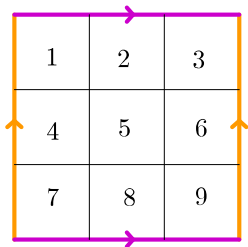


## Le plateau recollé

Il y a plusieurs manières différentes de recoller les bords. Je vais en présenter seulement deux aujourd'hui, mais vous pouvez en chercher d'autres.

## Le plateau recollé

Il y a plusieurs manières différentes de recoller les bords. Je vais en présenter seulement deux aujourd'hui, mais vous pouvez en chercher d'autres.



**FIGURE 2** – Un plateau recollé : On recolle les côtés opposés en suivant le sens des flèches.

### Question

*Quelle est la surface obtenue par le collage de la figure 2 ?*

## Le plateau recollé

The diagram shows a 6x6 grid representing a board. A vertical orange line separates the grid into two 3x6 halves. Orange arrows point upwards from the bottom edge and downwards from the top edge at the left and right boundaries, and also upwards from the bottom edge and downwards from the top edge at the vertical separator. Purple arrows point to the right along the top and bottom edges of the entire grid, and also to the right along the horizontal separator between the top and bottom halves.

1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9

Il est pratique de dessiner plusieurs fois le plateau recollé.

## Le plateau recollé

The diagram shows a 6x6 grid representing a board. A vertical orange line separates the grid into two 3x6 halves. Orange arrows point upwards from the bottom edge of each column. Purple arrows point to the right from the top edge of each row. The numbers 1, 2, 3 are placed in the first three columns of each row, and 4, 5, 6 in the last three columns.

1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9

Il est pratique de dessiner plusieurs fois le plateau recollé.

## Le plateau recollé

The diagram shows a 6x6 grid with numbers 1-9 in a repeating pattern. A vertical orange line separates the first three columns from the last three. A horizontal purple line separates the first three rows from the last three. Arrows indicate directions: purple arrows point right along the top and bottom edges, and orange arrows point up along the left and right edges. Shaded cells are: (1,2), (1,5), (2,4), (3,9), (4,2), and (5,1).

1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9

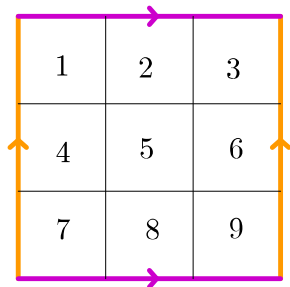
Il est pratique de dessiner plusieurs fois le plateau recollé. Ainsi, on voit mieux les nouveaux alignements.

## Le plateau recollé- questions

Voici quelques questions :

## Le plateau recollé- questions

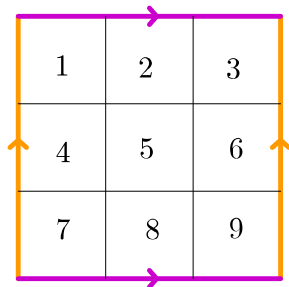
Voici quelques questions :



- Pouvez-vous trouver tous les nouveaux alignements ?

# Le plateau recollé- questions

Voici quelques questions :

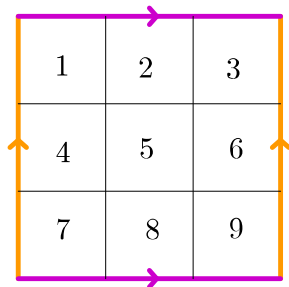


- ▶ Pouvez-vous trouver tous les nouveaux alignements ?
- ▶ Combien les cases ont-elles de voisines ?



# Le plateau recollé- questions

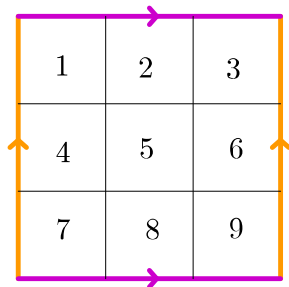
Voici quelques questions :



- ▶ Pouvez-vous trouver tous les nouveaux alignements ?
- ▶ Combien les cases ont-elles de voisines ?
- ▶ Est-ce que le premier joueur a une stratégie gagnante ? Si oui, comment doit-il jouer ?

# Le plateau recollé- questions

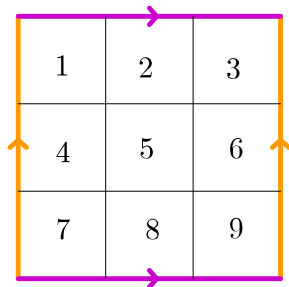
Voici quelques questions :



- ▶ Pouvez-vous trouver tous les nouveaux alignements ?
- ▶ Combien les cases ont-elles de voisines ?
- ▶ Est-ce que le premier joueur a une stratégie gagnante ? Si oui, comment doit-il jouer ?
- ▶ Combien y a-t-il de symétries du jeu ? [*Indice* : beaucoup.]

# Le plateau recollé- questions

Voici quelques questions :



- ▶ Pouvez-vous trouver tous les nouveaux alignements ?
- ▶ Combien les cases ont-elles de voisines ?
- ▶ Est-ce que le premier joueur a une stratégie gagnante ? Si oui, comment doit-il jouer ?
- ▶ Combien y a-t-il de symétries du jeu ? [*Indice* : beaucoup.]

On peut encore se poser les mêmes questions, avec les différentes manières de recoller le plateau.

# Entraînez-vous !

Cet exposé a été inspiré par le site de Jeffrey Weeks,

[geometrygames.org](http://geometrygames.org)

On peut y télécharger différentes variantes (ainsi que d'autres jeux).