Introduction à la théorie mesurée des groupes

Notes et exercices du cours de Romain Tessera, Orsay

Gabriel Pallier — mars 2016

Par défaut, les numérotations entre parenthèses des exercices sont celles des notes de cours de Damien Gaboriau ([2] version du 15 février 2016). Merci à Rodolfo Gutierrez et Xiaoqi Xu pour leurs relectures et contributions.

Le cours couvre en partie l'article de Gaboriau [3] de 2000. Pour des thèmes de la théorie géométrique des groupes (seulement effleurée ici), voir le livre de Pierre de la Harpe [5]. Pour un survol plus récent (2011) de la théorie mesurée des groupes, voir le survol de Furman [1].

Table des matières

1 Actions mesurées. Exemples.

Exercice 1 (1.1.4)**.** *Déterminer les sous-groupes de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ *agissant ergodiquement sur* $\mathbb{T}^2$.

Commençons par raisonner pour n quelconque. Soit $\pi : \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \curvearrowright L^2(\mathbb{T}^n)$ la représentation unitaire associée. La transformée de Fourier donne un isomorphisme isométrique $L^2(\mathbb{T}^n) \simeq \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ qui entrelace π en $\widehat{\pi}$. Décrivons $\widehat{\pi}$: pour toute $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ et $\gamma \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ on peut écrire

$$(\gamma.f)(x) = \sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\underline{k}) e^{2\pi i\langle \underline{k},\gamma^{-1}.x\rangle} = \sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\underline{k}) e^{2\pi i\langle {}^t\gamma^{-1}\underline{k},x\rangle} = \sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}({}^t\gamma\underline{k}) e^{2\pi i\langle \underline{k},x\rangle},$$

d'où : $\widehat{\pi} = \rho \circ \imath$, où ρ est la représentation tautologique $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \curvearrowright \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ et $\imath$ l'automorphisme involutif de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ donné par $\imath(\gamma) = {}^t\gamma^{-1}$. Soit $H < \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ un sous-groupe et $\widehat{\pi_H}$ la restriction de $\widehat{\pi}$ à H. Alors l'opération $H \curvearrowright \mathbb{T}^n$ est ergodique si et seulement si tout invariant de $\widehat{\pi_H}$ est à support dans $\{0\}$.

A partir de maintenant, on suppose $n = 2$. Soit $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ telle que $\widehat{f}$ est un invariant de $\widehat{\pi_H}$, $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ le support de $\widehat{f}$ et V le $\mathbb{Z}$-module engendré par S dans $\mathbb{Z}^2$. Pour tout $\underline{k} \in S$ et $\gamma \in H$ on doit avoir $\widehat{f}({}^t\gamma\underline{k}) = \widehat{f}(\underline{k})$. Ceci implique que ${}^tH\underline{k} \in S$; de plus, comme $\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$, ${}^tH\underline{k}$ est fini. Autrement dit, si $\widetilde{H} = \imath(H)$, alors V est $\widetilde{H}$-stable et $\widetilde{H}\underline{k}$ est fini. A présent :

1. Si V est de rang 2, alors il existe $\underline{k}_1$, $\underline{k}_2$ dans S indépendants sur $\mathbb{Z}$. Les ensembles $\widetilde{H}\underline{k}_1$ et $\widetilde{H}\underline{k}_2$ étant finis d'après ce qui précède, les matrices des éléments de $\widetilde{H}$ dans la base $\underline{k}_1, \underline{k}_2$ sont astreintes à se placer dans un ensemble fini. On en déduit que $\widetilde{H}$ est fini.
2. Si V est de rang 1, alors $\widetilde{H}$ s'inclut dans le stabilisateur d'une droite. Il y a deux possibilités : soit $\widetilde{H}$ est fini, soit $\widetilde{H}$ contient un sous-groupe parabolique $\widetilde{H_0}$ d'indice fini.

Théorème 1. *Soit H un sous-groupe de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$*. Alors l'action $H \curvearrowright \mathbb{T}^2$ est ergodique si et seulement si H est infini et ne contient pas de sous-groupe parabolique d'indice fini.*

Démonstration. Le "si" découle des arguments précédents : si H est infini et non virtuellement parabolique, c'est encore le cas de $\widetilde{H}$, puisque $\imath$ laisse stable l'ensemble des groupes paraboliques. Mais alors pour toute $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ invariante, le support de $\widehat{f}$ ne peut engendrer que $\{0\}$ comme $\mathbb{Z}$-module : les invariants de π sont les constantes. Réciproquement, si H est fini, soit $\underline{k} \in \mathbb{Z}^2$ non nul et posons f le polynôme trigonométrique donné par :

$$f(x) = \sum_{\gamma\in\widetilde{H}} e^{2i\pi\langle\gamma\underline{k},x\rangle}.$$

C'est un invariant non constant donc l'action de H n'est pas ergodique. Si H est virtuelement parabolique, alors $\widetilde{H}$ laisse stable une droite $\mathbb{Z}\underline{k}$, envoyant $\underline{k}$ su $\pm\underline{k}$; mais alors la fonction $f(x) = \cos(2\pi i\langle\underline{k},x\rangle)$ est un invariant non constant. $\square$

Exercice 2 ([2] 1.1.9). *Montrer que l'action par décalage de Bernoulli $\Gamma \curvearrowright (\{0,1\}^\Gamma, \mu_p^{\otimes\Gamma})$ est libre si et seulement si Γ est infini et $0 < p < 1$; et qu'elle est alors ergodique. Généraliser à l'action $\Lambda \curvearrowright (\{0,1\}^\Gamma, \mu_p^{\otimes\Gamma})$ pour Λ un sous-groupe infini.*

Liberté L'action par translation à gauche de Γ sur lui-même est transitive ; donc les points fixés par un élément sont les constantes 0 et 1 sur le groupe Γ. Celles-ci forment une partie de mesure nulle dans $\{0,1\}^\Gamma$ ssi Γ est infini et p est différent de 0 ou 1. Si $0 < p < 1$ et si Λ est un sous-groupe infini de Γ, le même argument s'applique encore : une fonction $\Gamma \to \{0,1\}$ est presque sûrement non constante sur les classes Γ/Λ, l'action $\Lambda \curvearrowright (\{0,1\}^\Gamma, \mu_p^{\otimes\Gamma})$ est libre.

Ergodicité On abrégera $\mu_p^{\otimes\Gamma}$ en μ. Soit donc A un borélien invariant, on veut montrer que μA est égal à 0 ou 1. Soit $\varepsilon > 0$; la mesure μ est régulière sur $\{0,1\}^\Gamma$ muni de la topologie engendrée par les cyclindres. En particulier, il existe $\Omega \subseteq \{0,1\}^\Gamma$ tel que $A \subseteq \Omega$ et $\mu(\Omega \setminus A) < \varepsilon/2$. L'ouvert Ω est réunion dénombrable de cylindres ; mais il suffit de sélectionner un nombre fini d'entre eux pour l'approximer inférieurement par $\Omega' \subseteq \Omega$ tel que $\mu(\Omega \setminus \Omega') < \varepsilon/2$, où Ω' est de la forme

$$\Omega' = C \times \{0,1\}^{F^c},$$

avec F une partie finie de Γ (l'union des bases de cyclindres formant Ω') et C une partie de $\{0,1\}^F$. On dispose alors des propriétés agréables suivantes :

- Ω' approxime A : $\mu(A\Delta\Omega') \leqslant \mu(A\Delta\Omega) + \mu(\Omega\Delta\Omega') \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
- Si $g \in \Gamma$ est tel que $gF \cap F = \emptyset$, alors $\Omega' \cap g\Omega'$ est de la forme $C \times C' \times \{0,1\}^{F^c \cap gF^c}$, où C' est une partie de $\{0,1\}^F$ en bijection avec C, en particulier $\mu(\Omega' \cap g\Omega') = \mu(\Omega')^2$

Finalement, si g est tel que $gF \cap F = \emptyset$, alors :

$$\begin{aligned} \mu(A) = \mu(A \cap gA) &\leqslant \mu(\Omega' \cap g\Omega') + 4\varepsilon \\ &= \mu(\Omega')^2 + 4\varepsilon \\ &\leqslant (\mu A + \varepsilon)^2 + 4\varepsilon \end{aligned}$$

L'inégalité de la première ligne venant de l'inclusion $(A \cap gA)\Delta(\Omega' \cap g\Omega') \subseteq A\Delta\Omega' \cup gA\Delta g\Omega' \cup A\Delta g\Omega' \cup gA\Delta\Omega'$, d'où il découle :

$$\begin{aligned} \mu\left[(A \cap gA)\Delta(\Omega' \cap g\Omega')\right] &\leqslant \mu\left[A\Delta\Omega' \cup gA\Delta g\Omega' \cup A\Delta g\Omega' \cup gA\Delta\Omega'\right] \\ &\leqslant \mu(A\Delta\Omega') + \mu g(A\Delta\Omega') + \mu(A\Delta g\Omega') + \mu(gA\Delta\Omega') \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \mu(A\Delta gA) + \mu(gA\Delta g\Omega') + \mu(gA\Delta A) + \mu(A\Delta\Omega') \\ &\leqslant 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Finalement, en faisant tendre ε vers 0 on obtient $\mu A \leqslant (\mu A)^2$, ce qui n'est possible que si $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$. Si Λ est un sous-groupe infini, on peut encore trouver $g \in \Lambda$ qui disjoint

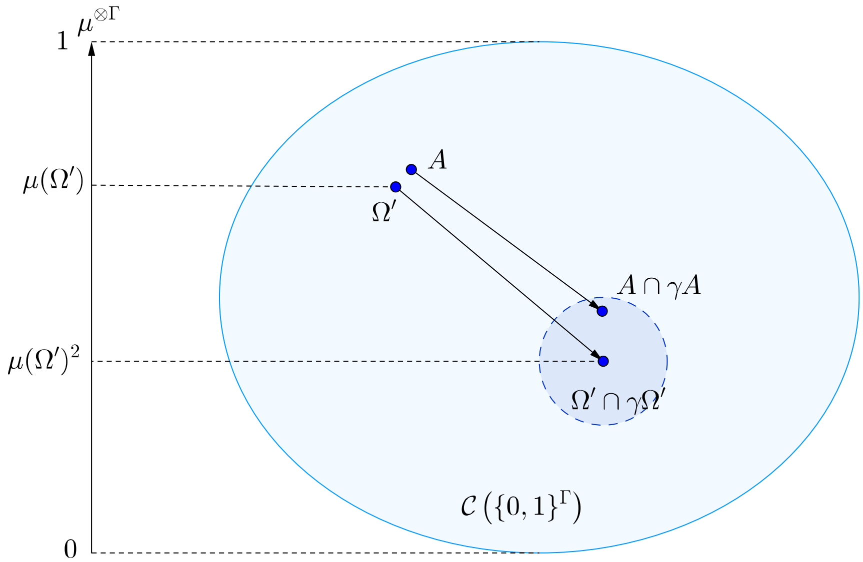

FIGURE 1 – Ergodicité du décalage de Bernoulli. La tribu cylindrique de $\{0,1\}^\Gamma$ est figurée en bleu clair. La mesure $\mu(A \cap \gamma A) \approx \mu(\Omega' \cap \Omega') = \mu(\Omega')^2$ témoigne du fait que A et $\gamma A \cap A$ sont assez éloignées pour la distance $d : (X, Y) \mapsto \mu(X \Delta Y)$.

F de lui-même ; en effet on construit une surjection

$$\begin{aligned} F \times F &\longrightarrow \{g \in \Gamma : gF \cap F \neq \emptyset\} \\ (f, f') &\mapsto f^{-1}f'. \end{aligned}$$

L'ensemble de droite est fini et ne peut contenir Λ.

Remarque 1. En particulier, tout groupe Γ dénombrable infini admet une action libre ergodique.

Exercice 3. *Etendre ce qui précède au décalage de Bernoulli généralisé, i.e.* $\Gamma \curvearrowright (X^V, \mu_0^{\otimes V})$ *où* V *est un ensemble muni d'une action de* Γ *à orbites infinies et* (X, μ_0) *un ebs de proba non réduit à un seul atome.*

Tous les arguments de la preuve précédente peuvent encore être enchaînés, sauf la possibilité de disjoindre $F \subset V$ (l'union des bases des cylindres de Ω') de lui-même en faisant agir Γ. Ceci fait l'objet d'un lemme à part ; voir par exemple la preuve de Neumann donnée dans [2] :

Lemme 1. *Soit* $\Gamma \curvearrowright V$ *une action sur* V *dénombrable, à orbites infinies. Alors pour toutes* $I, J \subset V$ *parties finie, il existe* $\gamma \in \Gamma$ *tel que* $\gamma I \cap J = \emptyset$.

On conclut par le lemme appliqué à $I = J = F$

Exercice 4. *Soit $\alpha : \Gamma \curvearrowright X = \varprojlim X_i$ une action profinie. Vérifier l'existence de la mesure μ telle que $\pi_{i*}\mu = \mu_i$, puis montrer que l'action est ergodique.*

L'existence de μ découle du théorème d'extension de Carathéodory appliqué à la semi-algèbre formée par les unions finies d'ombres (la prémesure de l'ombre de $F \subseteq \Gamma/\Gamma_i$ est $\mu_i(F)$). Soit $A \subseteq X$ un borélien invariant non négligeable. La mesure μ est extérieurement régulière, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une union finie d'ombres $B' = \pi_i^{-1}B$ telle que $A \subseteq B'$ et $\mu(B' \setminus A) < \varepsilon$. Supposons par l'absurde $\mu(B) < 1$. D'après un exercice précédent on a que $\mu(A \cap gA) \leqslant \mu(B' \cap gB') + 4\varepsilon$. Par ailleurs, si S est un système de représentant des classes à gauche de Γ modulo Γ_i

$$\frac{1}{|\Gamma/\Gamma_i|}\sum_s \in S|B \cap sB| = \int_{\mu_i} \mathbf{1}_B \sum_s \in S\mathbf{1}_{sB} = \frac{|B|^2}{|\Gamma/\Gamma_i|}.$$

En particulier il existe t tel que $\mu(tB' \cap B') \leqslant \mu(B')^2$. Faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $\mu(A) \leqslant \mu(A)^2$, ce qui conclut la preuve.

Exercice 5. *Donner des conditions pour qu'une action profinie soit essentiellement libre.*

On note $\alpha = \varprojlim \alpha_i$, où $\alpha_i : \Gamma \to \Gamma/\Gamma_i$ est l'action de Γ par translation à gauche. Pour tous γ et g dans Γ, on vérifie que :

$$\gamma.g\Gamma_i = g\Gamma_i \iff \gamma \in g\Gamma_i g^{-1}$$

En particulier, si $\Gamma_i \triangleleft \Gamma$, γ fixe $g\Gamma_i$ dans α_i si et seulement si $\gamma \in \Gamma_i$. Si γ fixe $x \in X$, alors $\gamma \in \Gamma_i$ pour tout i. On en déduit la condition dans le cas où $\Gamma_i \triangleleft \Gamma$ pour tout i : α est essentiellement libre (et alors libre) si et seulement si $\cap_i \Gamma_i$ est triviale.

Plus généralement, soit $\gamma \in \Gamma$, on cherche une condition permettant de s'assurer que les points fixes de Γ sont négligeables. Pour $x \in X$, écrivons

$$x = (g_1\Gamma_1, \dots g_i\Gamma_i, \dots).$$

Alors $\gamma.x = x$ si et seulement si γ est dans tous les $g_i\Gamma_i g_i^{-1}$. Soit S_i la classe de conjuguaison de Γ_i dans Γ, et $S_i(\gamma)$ l'ensemble des $\Gamma' \in S_i$ qui contiennent γ. Alors

$$\mu\{x : \gamma.x = x\} \leqslant \mu\{x_i \in \Gamma/\Gamma_i : x_i = g_i\Gamma_i, g_i\Gamma_i g_i^{-1} \in S_i(\gamma)\} = \frac{|S_i(\gamma)|}{|S_i|}.$$

Ceci permet de dégager la condition de Farber :

$$\liminf_i \frac{|S_i(\gamma)|}{|S_i|} = 0. \tag{1}$$

En fait il s'agit aussi d'une limite, car la suite $|S_i(\gamma)|/|S_i|$ est décroissante.

Exercice 6. *Donner des exemples d'actions de Bernoulli* $(X_0^\Gamma, \mu_0^{\otimes\Gamma})$ *et*$(X_1^\Gamma, \mu_1^{\otimes\Gamma})$ *qui sont conjuguées mais telles que* (X_0, mu_0) *et* (X_1, μ_1) *ne sont pas isomorphes.*

2 Orbite équivalence

2.1 Rappels de cours

Définition 1. *Deux actions pmp $\Gamma_1 \curvearrowright^{\alpha_1} (X, \mu_1)$ et $\Gamma_2 \curvearrowright^{\alpha_2} (X, \mu_2)$ sont dites orbite équivalentes s'il existe un isomorphisme d'espace mesurés $f : X_1 \to X_2$ tel que pour μ_1-presque tout $x \in X_1$ on a $f(\Gamma_1.x) = \Gamma_2.f(x)$.*

Deux groupes (dénombrables discrets) sont orbite équivalents (OE) s'ils admettent des actions libres pmp OE. Si Γ et Λ sont OE, on peut supposer qu'ils opèrent librement avec même relation d'orbite sur un même (X, μ) et il existe un cocycle $\sigma : \Gamma \times X \to \Lambda$ défini μ-presque partout qui à (γ, x) associe l'unique λ tel que $\gamma ._\Gamma x = \lambda ._\Lambda x$. L'orbite-équivalence pour les groupes est une relation d'équivalence (voir exercice 7).

Théorème 2 (Dye, voir aussi th 5)**.** *Toutes les actions libres pmp ergodiques de $\mathbb{Z}$, et de $\Gamma = \oplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sont OE entre elles.*

Equivalence orbitale stable, équivalence mesurée des groupes

Définition 2. *Deux actions pmp $\Gamma_1 \curvearrowright^{\alpha_1} (X, \mu_1)$ et $\Gamma_2 \curvearrowright^{\alpha_2} (X, \mu_2)$ sont dite stable-orbite-équivalentes (SOE) s'il existe des sections complètes $Y_1 \subset X_1$, $Y_2 \subset X_2$ et un isomorphisme d'ebs mesurés $f : Y_1 \to Y_2$ tels que pour μ_1-presque tout $x \in Y_1$:*

$$f(\Gamma_1.x \cap Y_1) = \Gamma_2.f(x) \cap Y_2.$$

Deux groupes sont mesurablement équivalents (ME) s'ils admettent des actions libres pmp SOE. Si deux actions sont OE, elles sont SOE ; si deux groupes sont OE, ils sont ME.

2.2 Exercices

Exercice 7 (1.2.5)**.** *La relation d'orbite-équivalence pour les groupes est une relation d'équivalence.*

Soient Γ, Λ et Σ des groupes dénombrables discrets. On suppose que Γ et Λ d'une part, Λ et Σ d'autre part, sont orbite-équivalents. Autrement dit, on dispose d'actions libres pmp

$$\Gamma \curvearrowright (X, \mu) \quad \overset{\text{OE}}{\sim} \quad \Lambda \curvearrowright (X, \mu),$$

$$\Lambda \curvearrowright (Y, \mu) \quad \overset{\text{OE}}{\sim} \quad \Sigma \curvearrowright (Y, \mu),$$

ainsi que d'isomorphismes d'espaces mesurés $f_X : X \to X$ et $f_Y : Y \to Y$ réalisant ces équivalences orbitales de gauche à droite (attention, le sens est important !). Les cocycles respectivement associés à f_X et f_Y^{-1} sont :

$$s : \Gamma \times X \to \Lambda,$$

$$g : \Sigma \times Y \to \Lambda.$$

On définit deux nouvelles actions $\Gamma, \Sigma \curvearrowright X \times Y$ par

$$\gamma.(x, y) = (\gamma.x, s(\gamma, x) \underset{\Lambda}{.} y),$$

$$\sigma.(x, y) = (g(\sigma, y) \underset{\Lambda}{.} x, \sigma.y).$$

Ces deux actions sont libres et pmp. Nous allons vérifier qu'elles sont OE : Soit $f = f_X \times f_Y$ l'application définie sur les couples par $f(x, y) = (f_X(x), f_Y(y))$. f est un isomorphisme d'espaces mesurés pour $\mu_X \otimes \mu_Y$ sur le produit $X \times Y$. Montrons que pour presque tout (x, y) on a $f(\Gamma.(x, y)) = \Sigma.(x, y)$. Ce dernier ensemble est caractérisé comme suit :

$$(x', y') \in \Sigma.(x, y) \iff \exists \sigma \in \Sigma : y' = \sigma.y \text{ et } x' = g(\sigma, y).x.$$

Remarquons que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a :

$$\begin{aligned} f(\gamma.(x, y)) &= (f_X(\gamma.x), f_Y(s(\gamma, x).y)) \\ &= (s(\gamma.x), x), f_Y(s(\gamma, x).y)). \end{aligned}$$

Mais alors $f_Y(s(\gamma, x).y) = \sigma.y$, où σ est tel que $g(\sigma, y) = s(\gamma, x)$. Donc on a bien $f(\gamma.(x, y)) \in \Sigma.(x, y)$. Réciproquement, le même raisonnement s'applique avec $f^{-1} = f_X^{-1} \times f_Y^{-1}$ qui envoie $\Sigma.(x, y)$ dans $\Gamma.(x, y)$.

3 Relations standard, relations pmp

3.1 Rappels de cours

Définition 3 (Relation standard, pmp)**.** *Soit (X, μ) un e.b.s de probabilité, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. Si les classes de $\mathcal{R}$ sont dénombrables et si $\mathcal{R}$ est une partie borélienne de $X \times X$, alors $\mathcal{R}$ est dite standard. Si de plus μ est invariante par tout isomorphisme partiel $\varphi : A \to B$ dont le graphe est contenu dans $\mathcal{R}$ alors on dit que $\mathcal{R}$ est pmp*

Les relations d'orbites pour une action pmp d'un groupe dénombrable, sont pmp (exercice 2.1.3). En fait, ce sont les seules :

Théorème 3 (Feldman-Moore 2.1.8)**.** *Pour toute relation d'équivalence pmp, il existe un groupe dénombrable Γ et une action α (pas libre, a priori) tel que $\mathcal{R}$ est la relation d'orbite de α.*

Définition 4. *Soit $\mathcal{R}$ une relation pmp, on note $[[\mathcal{R}]]$ et on appelle groupoïde plein le groupoïde dont les objets sont les boréliens de X modulo différence symétrique négligeable, et les flèches les isomorphismes partiels, modulo égalité presque partout.*

Le groupe plein $[\mathcal{R}]$ est le groupe des isomorphismes de X respectant $\mathcal{R}$. Ce groupe opère par isométries pour la distance $d(A, B) = \mu(A\Delta B)$ sur les classes de boréliens. Il découle des lemmes suivants que si $\mathcal{R}$ est ergodique (i.e. les parties saturées sont de mesure nulle ou totale) alors μ est un invariant complet de cette action.

Lemme 2. *Tout élément de $[[\mathcal{R}]]$ s'étend en un élément de $[R]$.*

Lemme 3. *Si $\mathcal{R}$ est ergodique alors pour tous A, B tels que $\mu(A) = \mu(B)$ il existe $\psi : A \to B$ dans $[[\mathcal{R}]]$.*

Proposition 1 (Lemme de Rokhlin)**.** *Soit $\alpha : \mathbb{Z} \curvearrowright (X, \mu)$ libre et ergodique, $1 \in \mathbb{Z}$ agissant par T. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ il existe B dans X tel que*

$$\mu(B \sqcup TB \sqcup \ldots \sqcup T^{n-1}B) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

3.2 Exercices

Exercice 8. *Soit α une action pmp du groupe discret dénombrable Γ. La relation d'orbite $\mathcal{R}_\alpha$ est pmp*

On fera l'abus de notation consistant à désigner $\gamma ._\alpha x$ par $\gamma(x)$, pour $\gamma \in \Gamma$. Soit $\overline{\psi}$ dans $[[\mathcal{R}_\alpha]]$, $\psi : A \to B$ un représentant de $\overline{\psi}$. Il s'agit de montrer que ψ préserve $\mu_{|A}$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, introduisons

$$A_\gamma = \{a \in A : \psi(a) = \gamma . a\} .$$

Alors A_γ est mesurable : en effet quitte à identifier mesurablement X à $[0, 1]$, $\gamma - \psi$ est mesurable. De plus les A_γ recouvrent A, puisque par hypothèse le graphe de ψ est contenu dans $\mathcal{R}_\alpha$. Si α est libre, les A_γ sont disjoints, ce qui permet d'atteindre la conclusion très rapidement, mais ce n'est pas le cas en général. Pour cela, on introduit

$$\Gamma_\psi = \{\gamma \in \Gamma : \mu(A_\gamma) > 0\}.$$

On énumère Γ_ψ (éventuellement fini) sous la forme

$$\Gamma_\psi = \{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots\}.$$

Enfin, on pose $C_0 = A_{\gamma_0}$, et $C_i = A_{\gamma_i} \setminus \bigcup_{j<i} A_{\gamma_j}$ pour $i \geqslant 1$. Par construction les C_i forment une partition de $A \setminus A_0$, où A_0 est négligeable. De plus, si l'on pose $D_i = \gamma_i(C_i)$ alors les D_i forment une partition de B. Soit $B' \subseteq B$ un borélien. Alors (en indiçant Γ_ψ par $I = \mathbb{N}$ ou $\{1, \ldots n\}$) :

$$\psi^{-1}B' = \bigsqcup_{i\in I} \psi^{-1}(B') \cap C_i = \bigsqcup_{i\in I} \gamma_i^{-1}(B') \cap C_i = \bigsqcup_{i\in I} \gamma_i^{-1}(B' \cap D_i),$$

d'où

$$\mu(\psi^{-1}B') = \sum_{i\in I} \mu(\gamma_i^{-1}(B' \cap D_i)) = \sum_{i\in I} \mu(B' \cap D_i) = \mu(B').$$

Exercice 9 (2.2.7, sur les relations finies)**.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation pmp. Alors $\mathcal{R}$ possède un domaine fondamental si et seulement si $\mathcal{R}$ est finie (i.e. ses orbites sont finies, sauf éventuellement certaines dont la réunion dans X est de mesure nulle).*

Si $\mathcal{R}$ est finie alors $\mathcal{R}$ admet un domaine fondamental Soit Γ et α un groupe et une action donnés par le théorème de Feldman-Moore. On identifie μ à la mesure de Lebesgue sur $[0,1] \simeq X$. Pour tout $x \in X$ on pose $J(x) = \inf\{\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\}$. Alors J est mesurable comme infimum de fonctions mesurables ; de plus puisque $\mathcal{R}[x]$ est finie pour μ-presque tout x, $J(x) \in \mathcal{R}[x]$. On définit alors D comme l'ensemble des x tels que $x = J(x)$. D est mesurable car J est mesurable. C'est un domaine fondamental pour $\mathcal{R}$.

Si $\mathcal{R}$ admet un domaine fondamental, alors $\mathcal{R}$ est finie Supposons que $\mathcal{R}$ admet un domaine fondamental D. Suivant l'indication, donnée par [2], on pose D_∞ l'ensemble des $x \in D$ tels que $\mathcal{R}[x]$ est infinie, et il s'agit de montrer que D_∞ est μ-négligeable. Pour cela, on va montrer qu'il existe dans X une famille dénombrable d'ensembles disjoints de même mesure que D_∞. Soit $\Gamma = \{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une indexation de Γ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D_\infty$, on pose

$$i_n(x) = \min\left\{i : |\{g_1(x), \ldots g_i(x)\}| = n\right\}.$$

Ceci est bien défini car $\mathcal{R}[x]$ est infini par hypothèse. Puis on définit $\psi_n(x) = g_{i_n(x)}(x)$. Alors :

— Les ψ_n sont des isomorphismes partiels de $\mathcal{R}$: ce sont des recollement des g_j sur les parties $D_{n,j} = \{i_n = j\}$ qui sont mesurables ainsi qu'on le vérifie par récurrence sur j.

— Les $\psi_n(D_\infty)$ sont disjoints : s'il existe $y \in \psi_n(D_\infty) \cap \psi_m(D_\infty)$, alors quitte à écrire $y = \psi_n(x) = \psi_m(x')$ on a que $y \in \mathcal{R}[x] \cap \mathcal{R}[x']$ donc $x = x'$ vu que D_∞ est dans un domaine fondamental ; puis $g_{i_n(x)} = g_{i_m(x)}$ implique $n = m$ étant donnée la définition de i_n

Exercice 10. *Deux groupes finis ont même cardinal si et seulement si toutes leurs actions libres et pmp sont OE.*

Le sens indirect est immédiat : si deux orbites sont en bijection, alors les groupes sont en bijection car les actions sont libres. Soient donc Γ et Λ deux groupes finis qui opèrent pmp sur $([0,1],\mu)$. Décrivons un isomorphisme mesuré $f : [0,1] \to [0,1]$ réalisant l'orbite équivalence : Pour tout $x \in [0,1]$, écrivons $\Gamma.x = \{x_1, \dots x_r\}$ avec $x_1 < \cdots < x_r$ et $x = x_i$. On considère alors $\Lambda.x_1 = \{y_1, \dots y_r\}$ avec $y_1 < \cdots < y_r$ et on pose $f(x) = y_i$. On vérifie alors comme souhaité

$$f(\Gamma.x) = f(\Gamma.x_1) = \Lambda.x_1 = \Lambda.x_i = \Lambda.f(x).$$

Montrons que f est un isomorphisme mesuré : avec les notations précédentes, soient $D_i = \{x \in X : x = x_i\}$ et $E_i = \{y \in X : y = y_i\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Soient $d : X \to D_1$ et $e : X \to E_1$ donnés par :

$$d : x \mapsto \inf_{\gamma \in \Gamma}\{\gamma.x\},$$

$$e : y \mapsto \inf_{\lambda \in \Lambda}\{\lambda.y\}.$$

Maintenant, on obtient f comme le recollement des $f_i = e_i^{-1} e d_i$ et $f_i^{-1} = d_i^{-1} d e_i$. Ainsi f est une bijection borélienne, respectant la relation $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\Gamma \vee \mathcal{R}_\Lambda$ qui est pmp. Donc f est un isomorphisme mesuré.

Exercice 11 (2.2.11, sur les relations infinies)**.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence pmp. S'équivalent :*

1. *L'union des classes finies de $\mathcal{R}$ est négligeable.*
2. *$\mathcal{R}$ admet une suite **décroissante** de sections complètes, dont les mesures tendent vers 0.*
3. *$\mathcal{R}$ admet des sections complètes arbitrairement petites.*
4. *Pour tout borélien $Y \subseteq X$ non négligeable, les classes de la relation $\mathcal{R} \mid Y$ sont infinies, sauf éventuellement une partie d'entre elles formant une union négligeable.*

Les implications $2 \implies 3$ et $4 \implies 1$ sont apparentes.

(a) Preuve de $1. \implies 2.$ Soit Γ un groupe de Feldmann-Moore pour $\mathcal{R}$, et J l'application de l'exercice 9. On pose

$$E_n = \left\{x \in [0,1] : J(x) \leqslant x < 2^{-n}\right\}.$$

Les ensembles E_n sont décroissants. De plus, par définition de J il existe toujours $x' \in \mathcal{R}[x]$ tel que $x' < J(x) + 2^{-n}$, donc les E_n forment des sections complètes. Enfin, voyons que $\mu(E_n) \to 0$:

il s'agit de montrer que $\mu(\cap_n E_n) = 0$. Or $D = \cap_n E_n$ rencontre chaque classe de $\mathcal{R}$ en au plus un élément ; donc c'est un domaine fondamental pour $\mathcal{R} \mid \mathcal{R}D$. D'après le résultat de l'exercice 9, $\mathcal{R} \mid \mathcal{R}D$ est finie. Mais alors la condition 1 implique $\mu(D) = 0$, donc $\mu(E_n) \to 0$.

(b) Preuve de $3. \implies 4.$ Soit $\widetilde{Y}$ la réunion des classes finies de $\mathcal{R} \mid Y$. C'est un borélien (car $\mathcal{R}$ est borélienne). Soit $\varepsilon > 0$ et Z une section complète de $\mathcal{R}$ de mesure $\leqslant \varepsilon$. On pose $\widetilde{J}$ qui à $x \in \widetilde{Y} \cap \mathcal{R}$ associe $\inf\{\mathcal{R}[x] \cap Y\}$.

4 Groupes moyennables

Exercice 12. *Les groupes finis, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^n$ pour $n \geqslant 1$ vérifient la condition de Følner.*

Groupe fini Soit Γ un groupe fini, $K \subset \Gamma$ une partie finie. Alors la partie $A = \{A\}$ qui est le sous-groupe (fini) engendré par Γ vérifie

$$A \Delta K A = A \Delta A = \emptyset.$$

Donc A est un ensemble de Følner pour K et pour tout $\varepsilon > 0$.

Groupes abéliens libres de type fini Soit d la distance de mots sur $\mathbb{Z}^n$, et B_r la boule de rayon r pour d. Soit D une borne pour la distance à 0 sur K. Alors $|B_r| \sim C r^n$, tandis que pour tout $k \in K$,

$$\begin{aligned} |B_r \Delta k B_r| &= |B_r \setminus k B_r \cup k B_r \setminus B_r| \\ &\leqslant |B_r \setminus kA| + |B_r \setminus k^{-1} A| \\ &\leqslant 2 |B_{r+D} \setminus B_{r-D}|, \end{aligned}$$

avec $|B_{r+D} \setminus B_{r-D}| \sim C' r^{n-1}$. Ainsi, quand r tend vers $+\infty$,

$$\frac{|B_r \Delta k B_r|}{|B_r|} \longrightarrow 0;$$

on dit que (B_r) est une suite de Følner.

Exercice 13. *La moyennabilité est un invariant de quasi-isométrie.*

Ceci se voit plus facilement avec la condition de Følner à droite (qui est bien sûr équivalente, les actions de Γ sur lui-même par translation à gauche et à droite étant isomorphes via l'application équivariante $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$). Quitte à augmenter K, on peut supposer que c'est un système générateur de Γ. Soit $\mathcal{G}$ un graphe de Cayley de Γ associé. Alors l'union des $A \Delta A k$ est l'ensemble des arêtes de $\mathcal{G}$ qui ont exactement un sommet dans A. On note cet ensemble ∂A. La condition de Følner à droite équivaut donc à

$$\inf \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|} : A \subset \Gamma \text{ finie} \right\} = 0. \tag{2}$$

On dit que Γ admet une constante isopérimétrique nulle. Il est alors possible de vérifier que cette propriété est invariante par quasiisométrie.

Exercice 14. *Si Γ vérifie la condition de Følner, alors sa représentation régulière gauche contient faiblement la représentation triviale (condition de Hulanicki-Reiter).*

Soit $\varepsilon > 0$, K une partie finie de Γ, A un ensemble de Følner pour (K, ε^2) et f sa fonction indicatrice. Alors pour tout $k \in K$:

$$\|k.f - f\|_2^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |f(k^{-1}\gamma) - f(\gamma)|^2 = |A\Delta kA| < \varepsilon^2|A| = \|f\|^2 :$$

f est (K, ε) presque invariant de la représentation régulière gauche.

Exercice 15 ([2] 3.1.8)**.** *La condition de Hulanicki-Reiter implique celle de Reiter.*

Soit $f \in \ell^2(\Gamma)$ qui est (K, ε)-presque invariante. Posons $h = |f|^2 = f\overline{f}$. Alors h est dans $\ell^1(\Gamma)$ précisément parce que f est dans $\ell^2(\Gamma)$; de plus on peut réécrire pour tous $a, b \in \Gamma$:

$$h(a) - h(b) = (f(a) + f(b))(\overline{f(a)} - \overline{f(b)}).$$

De sorte que

$$\|h - k.h\|_1 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |h(\gamma) - h(k^{-1}\gamma)| = |\langle f - k.f \mid \overline{f} + k.\overline{f}\rangle| \leqslant 2\|f - k.f\|_2.$$

La dernière inégalité provenant de celle de Cauchy-Schwarz. Quitte à prendre une exhaustion de Γ par une suite d'ensembles finis croissants (K_n), et à poser f_n une fonction $(K_n, 2^{-n})$-invariante, on a la propriété de Reiter souhaitée.

Condition de Hulanicki-Reiter et propriété de Kazhdan La condition de Hulanicki-Reiter implique que la moyennabilité est une qualité peu compactible avec la propriété (T) de Kazhdan. Rappelons en effet la

Définition 5. *Un groupe topologique vérifie la propriété* (T) *de Kazhdan si toute représentation continue qui contient des vecteurs presque invariants, contient des vecteurs invariants.*

Par exemple, les groupes compacts, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ pour $n \geqslant 3$, vérifient la condition de Kazhdan (ce n'est pas trivial pour $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, $n \geqslant 3$). La condition de Hulanicki-Reiter dit que les représentations régulières continennent des vecteurs presque invariants. Mais si Γ est infini, les représentations régulières ne peuvent pas posséder d'invariant non nul. Par conséquent, un groupe moyennable vérifie la propriété de Kazhdan ssi il est fini.

Exercice 16. *Le groupe $\mathbb{F}_2$ n'est pas moyennable.*

Soient a et b les deux générateurs du groupe $\mathbb{F}_2$. Alors $\mathbb{F}_2$ admet la décomposition suivante :

$$\mathbb{F}_2 = \{e\} \sqcup E_a \sqcup E_b \sqcup E_{a^{-1}} \sqcup E_{b^{-1}}$$

où E_w est l'ensemble des mots qui commencent par la lettre w. Si μ est une hypothétique mesure finiment additive sur $\mathbb{F}_2$, alors $\mu(\{e\}) = 0$ (comme $\mathbb{F}_2$ est infini). Mais $a^{-1}E_a = E_a \sqcup E^b \sqcup E_{b^{-1}} \sqcup$

$\{0\}$, d'où $\mu(E_b) + \mu(E_{b^{-1}}) = 0$. De même en translatant E_b, $\mu(E_a) + \mu(E_{a^{-1}}) = 0$. Finalement $\mu(\mathbb{F}_2) = 0$.

Exercice 17. *Montrer, en contredisant le critère de Følner* ***à droite****, que le groupe $\mathbb{F}_r$ n'est pas moyennable si $r \geqslant 2$.*

Nous allons utiliser que les groupes libres admettent une inégalité isopérimétrique linéaire. Précisément, on a le

Lemme 4. *Soit $\mathcal{G}$ le graphe de Cayley de $\mathbb{F}_r$ sur le système générateur standard (symétrique) à $2r$ éléments. Soit $\mathcal{A} < \mathcal{G}$ un sous-graphe fini et connexe. On note $\partial\mathcal{A}$ l'ensemble des arêtes de $\mathcal{G}$ qui ont exactement une extrémité dans l'ensemble des sommets de $\mathcal{A}$. Alors*

$$|\partial\mathcal{A}| = (2r-2)|V(\mathcal{A})| + 2. \tag{3}$$

Démonstration. De chaque sommet émanent $2r$ arêtes. Comptons les arêtes de $\mathcal{G}$ partant des sommets de $\mathcal{A}$:

$$2|E(\mathcal{A})| + |\partial\mathcal{A}| = 2r|V(\mathcal{A})|,$$

les arêtes de $\mathcal{A}$ étant comptées deux fois par leur deux extrémités, les arêtes dans $\partial\mathcal{A}$ une seule fois. Mais par ailleurs $\mathcal{A}$ est un arbre, donc $|E(\mathcal{A})| = |V(\mathcal{A})| - 1$. On en déduit l'égalité souhaitée. $\square$

Du lemme nous déduisons plus largement que $|\partial\mathcal{A}| \geqslant (2r-2)|V(\mathcal{A})|$, sans supposer $\mathcal{A}$ connexe. Soit maintenant K le système générateur standard de $\mathbb{F}_r$. Alors pour toute $A \subset \mathbb{F}_r$ finie,

$$\sum_{k\in K} |A\Delta Ak| \geqslant \sum_{k\in K} |Ak \setminus A| = |\partial\mathcal{A}| \geqslant (2r-2)|A|,$$

où $\mathcal{A}$ est le sous-graphe de $\mathcal{G}$ formé sur A, la dernière inégalité provenant de $|\partial\mathcal{A}| \geqslant (2r-2)|V(\mathcal{A})|$. Si $r \geqslant 2$, cela contredit la condition de Følner. Conclusion : $\mathbb{F}_r$ n'est pas moyennable (pour $r \geqslant 2$).

Exercice 18. *Exhiber des suites de Følner pour les groupes* Heis *et* Sol.

Nous avons vu que le groupe Heis est à croissance polynômiale. En particulier, cette croissance est sous-exponentielle. Donc une extraction de la suite des boules de rayon croissant forment une suite de Følner.

Pour le groupe Sol on doit procéder différemment, car la croissance est exponentielle. Ecrivons donc $\mathrm{Sol} = \mathbb{Z}^2 \rtimes_H \mathbb{Z}$, avec H matrice hyperbolique de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Soit ρ la norme d'opérateur de H pour la norme sup sur $\mathbb{Z}^2$. Soit $r \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $r > \rho$. Dans la décomposition ensembliste $\mathrm{Sol} \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ on pose

$$A_n = \{-r^n, \dots, r^n\}^2 \times \{-n, n\}.$$

Vérifions que (A_n) est une suite de Følner à droite pour toute partie $K \subset \mathrm{Sol}$ finie : il s'agit de montrer que

$$\frac{|A_n k \Delta A_n|}{|A_n|} \to 0$$

pour tout $k \in K$. Si l'on écrit $k = (k_1, k_2, j)$ alors

$$(x, y, t) \cdot k = \left(H^t \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t + j \right).$$

Si l'on parvient à montrer que $A_n k \subset B_n$ avec $A_n \subset B_n$ et $|B_n|/|A_n| \to 1$, alors on aura la propriété voulue. En effet, $A_n \sqcup (A_n k \setminus A_n) \subseteq B_n$ et $A_n k \sqcup (A_n \setminus A_n k) \subset B_n$ donc

$$|A_n| \leqslant |A_n| + |A_n k \setminus A_n| \leqslant |B_n| \sim |A_n|$$

$$|A_n| = |A_n k| \leqslant |A_n k| + |A_n \setminus A_n k| \leqslant |B_n| \sim |A_n|,$$

ce qui implique $|A_n k \setminus A_n| + |A_n \setminus A_n k| = o_{n \to +\infty}(|A_n|)$. Or pour tout $(x, y, t) \in A_n$ on a, si $\| \cdot \|$ désigne la norme sup sur $\mathbb{Z}^2$:

$$\left\| H^t \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leqslant \rho^t \left\| \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leqslant \rho^n \kappa + r^n,$$

où l'on a posé $\kappa = \|(k_1, k_2)\|$. On prend donc

$$B_n = \{-r^n - \rho^t \kappa, \dots, r^n + \rho^t \kappa\} \times \{-n - |j|, \dots n + |j|\}.$$

Comme $\rho < r$, $|B_n| \sim |A_n|$, et d'autre part $A_n k \subset B_n$ d'après le calcul précédent. Ceci conclut.

Exercice 19. Γ *est moyennable si et seulement s'il admet une mesure invariante finiment additive de probabilité.*

De la moyenne à la mesure On suppose Γ équippé d'une moyenne invariante m. On pose

$$\mu(B) := m(\mathbf{1}_B)$$

pour tout $B \in \mathcal{P}(\Gamma)$ Alors μ est invariante à gauche car m est invariante à gauche ; μ est finiment additive car m est linéaire. Enfin, $1 = \inf \mathbf{1}_\Gamma \leqslant \mu(\Gamma) \leqslant \sup \mathbf{1}_\Gamma = 1$, donc $\mu(\Gamma) = 1$.

De la mesure à la moyenne On suppose donnée μ une mesure invariante de probabilité finiment additive sur Γ. On commence par définir f pour les fonctions étagées (combinaisons linéaires de fonctions indicatrices) par

$$m\left(\sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{B_i} \right) := \sum_i \lambda_i \mu(B_i).$$

Puis, les fonctions étagées sont ℓ^∞-denses dans $\ell^\infty(\Gamma)$. La forme linéaire m, qui est continue de norme d'opérateur $\leqslant 1$, s'étend.

Exercice 20. *Un sous-groupe d'un groupe moyennable est moyennable.*

Soit Γ un groupe moyennable, $\Lambda < \Gamma$ un sous-groupe. On dispose de m_Γ définie sur $\ell^\infty(\Gamma)$ et on veut en déduire m_Λ définie sur $\ell^\infty(\Lambda)$ vérifiant la même propriété d'invariance à gauche et de moyenne. Soit $(\gamma_i)_{i\in\Gamma/\Lambda}$ un système de représentants des classes à droite : $\Lambda\backslash\Gamma = \{\Lambda\gamma_i\}$, on a une injection $\ell^\infty(\Lambda) \to \ell^\infty(\Gamma)$ donnée par $\overline{f}(\lambda\gamma_i) = f(\lambda)$ pour tout i, qui est équivariante pour l'action de Λ à gauche, autrement dit, pour tous λ, λ' dans Λ :

$$\overline{\lambda.f}(\lambda'\gamma_i) = (\lambda.f)(\lambda') = f(\lambda^{-1}\lambda') = \overline{f}(\lambda^{-1}\lambda'\gamma_i) = (\lambda.\overline{f})(\lambda'\gamma_i).$$

On pose donc $m_\lambda(f) := m_\Gamma(\overline{f})$ pour $f \in \ell^\infty(\Lambda)$. Alors

$$\inf f = \inf \overline{f} \leqslant m_\Lambda(f) \leqslant \sup \overline{f} = \sup f$$

d'une part, et d'autre part

$$\forall\lambda \in \Lambda, m_\Lambda(\lambda.f) = m_\Gamma\left(\overline{\lambda._\Lambda f}\right) = m_\Gamma\left(\lambda._\Gamma\overline{f}\right) = m_\Gamma\left(\overline{f}\right) = m_\Lambda(f).$$

Exercice 21. *Une limite inductive de groupes moyennables est moyennable.*

Soit $\Gamma = \varinjlim \Gamma_n$ pour $n \to +\infty$. Par la construction de l'exercice précédent, une moyenne invariante m_n sur G_n induit une moyenne Γ_n-invariante à gauche $\widetilde{m_n}$ sur G_∞. L'espace $E = \ell^\infty(\Gamma)$ étant de Banach, le théorème de Banach-Alaoglu assure que la boule unité B de son dual est compacte pour la topologie faible-étoile $\sigma(E', E)$. La suite $(\widetilde{m_n})_n$ est à valeurs dans B (à cause de la condition $|\widetilde{m_n}(f)| \leqslant |f|$) donc possède une sous-suite convergente pour cette topologie. Appelons m_∞ la limite. L'ensemble $\mathcal{M}_n$ des moyennes Γ_n-invariantes est fermé (en tant qu'intersection de fermés) et $\mathcal{M}_n \supseteq \mathcal{M}_{n+1}$ pour tout n. Il s'ensuit que $m_\infty \in \cap_n\mathcal{M}_n$, autrement dit m_∞ est Γ-invariante. De plus par définition de la topologie faible-$\star$, pour toute $f \in \ell^\infty(\Gamma)$ on a que

$$m_\infty(f) = \lim_{n\to+\infty} \widetilde{m_n}(f).$$

Puisque $\widetilde{m_n}(f) \in [\inf f, \sup f]$ pour tout n, m_∞ vérifie la condition de moyenne.

Exercice 22. *Une extension de groupes moyennables, est moyennable.*

Soit une suite exacte courte à facteurs moyennables

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma/\Lambda \longrightarrow 1.$$

Pour toute $f \in \ell^\infty(\Gamma)$ on définit $\check{f} \in \ell^\infty(\Gamma/\Lambda)$ par $\check{f}(\gamma\Lambda) := m_\Lambda\left((\gamma.f)_{|\Lambda}\right) = m_\Lambda(f(\gamma-))$. Puis

$$m_\Gamma(f) := m_{\Gamma/\Lambda}(\check{f}).$$

Pour tout $g \in \Gamma$,

$$\overbrace{g.f}^{\vee}(\gamma\Lambda) = m_\Lambda((g.f)(\gamma -)) = m_\Lambda(f(g^{-1}\gamma -)) = [g].\check{f}(\gamma\Lambda),$$

où $[g]$ est la classe de g dans Γ/Λ. De la Γ/Λ-invariance de $m_{\Gamma/\Lambda}$, il s'ensuit que $m_\Gamma(g.f) = m_\Gamma(g)$, i.e. m_Γ est bien Γ-invariante.

Remarque 2. Si l'extension est un produit direct, alors les mesures invariantes sont liées par $\mu_{\Lambda\times\Delta} = \mu_\Lambda \otimes \mu_\Delta$.

Remarque 3. Les groupes virtuellement résolubles de type fini sont moyennables. En effet soit Γ un tel groupe ; Γ est quasiisométrique à un sous-groupe Δ résoluble d'indice fini. Δ est obtenu par extensions successives de groupes abéliens, qui sont quasiisométriques à des groupes abéliens libres de type finis, moyennable d'après l'exercice 12. On conclut avec l'exercice 13.

5 Relations d'équivalence moyennable, hyperfinitude

5.1 Rappels de cours

5.1.1 Relations moyennables

Définition 6 (4.1.1). *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence pmp sur (X, μ). On dit que $\mathcal{R}$ est moyennable, si quitte à éliminer une partie μ-négligeable $\mathcal{R}$-saturée de X, il existe une suite de fonctions mesurables positives $\lambda^n : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ telles que, en notant $\lambda^n_x = \lambda^n(x, -) : \mathcal{R}[x] \to \mathbb{R}$:*

1. *$\lambda^n_x \in \ell^1(\mathcal{R}[x])$, pour tout $x \in X$*
2. *$\|\lambda^n_x\|_1 = 1$, pour tout $x \in X$*
3. *Pour tout $(x, y) \in \mathcal{R}$, $\|\lambda^n_x - \lambda^n_y\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$*

Théorème 4. *Soit $\alpha : \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ pmp Si Γ est moyennable, alors $\mathcal{R}_\Gamma$ est moyennable. Réciproquement, si $\mathcal{R}_\Gamma$ est moyennable et si α est essentiellement libre, alors Γ est moyennable.*

Pour la preuve de ce théorème, (λ^n) et une suite (f_n) de Reiter à droite pour Γ se déduisent l'une de l'autre. Pour simplifier supposons que α est libre ; alors on pose

$$\lambda^n(x, z) = f_n(\gamma)$$

où γ est l'unique tel que $\gamma.x = z$; inversement

$$f_n(\gamma) = \int_X \lambda^n(x, \gamma.x) d\mu(x)$$

La vérification que λ^n ainsi définie vérifie la condition 3. de la définition résulte d'une convergence dominée.

5.1.2 Relations hyperfinies

Une relation borélienne (resp. mesurée) est hyperfinie si c'est l'union croissante de relations boréliennes (resp. mesurées) finies.

Théorème 5 (Dye). *Toutes les relations pmp hyperfinies ergodiques sont mutuellement orbite-équivalentes.*

Ce théorème généralise celui énoncé pour les actions libres ergodiques de $\mathbb{Z}$ et $\oplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; toutefois la proposition suivante

Proposition 2. *Une relation pmp est hyperfinie si et seulement si c'est la relation des orbites d'une action pmp de $\mathbb{Z}$.*

La démonstration fait l'objet des exercices 29 et 30.

5.1.3 Moyennabilité et hyperfinitude

On vérifie directement (exercice 25) que les relations hyperfinies sont moyennable. L'autre sens est nettement moins immédiat :

Théorème 6 (Connes-Feldman-Weiss 1981)**.** *Toute relation pmp moyennable est hyperfinie.*

En particulier (Ornstein-Weiss 1980) toute relation d'orbite donnée par un groupe moyennable est hyperfinie (le théorème 6 est plus fort, car le groupe fourni par le théorème **??** de Feldman-Moore n'agit pas forcément librement, cf. le contre-exemple de Furman).

5.2 Exercices

Exercice 23. *Soit $\mathcal{R}$ une relation pmp et $U \subseteq X$ non négligeable. Si $\mathcal{R}$ est moyennable alors $\mathcal{R} \mid U$ est moyennable. Réciproquement si $\mathcal{R} \mid U$ est moyennable et si U est une section complète, alors U est moyennable.*

Déjà, $\mathcal{R} \mid \mathcal{R}U$ est moyennable : il suffit pour cela de considérer les restrictions $\lambda^n_{|\mathcal{R}U\times\mathcal{R}U}$, qui vérifient les conditions de la définition. U est une section complète dans $\mathcal{R}U$; on est donc ramené au cas où U est une section complète de X. Suivant l'indication, on introduit une partition $\cup_i A_i = X \setminus U$ et des isomorphismes partiels $\varphi_i : A_i \to U$, dits de rapatriement.

Exercice 24. *La relation d'équivalence de queue sur $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mu_{1/2}^{\otimes\mathbb{N}})$ est hyperfinie.*

C'est la relation d'orbites de

$$\Gamma = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \tag{4}$$

et le groupe Γ est localement fini.

Exercice 25. *Toute relation mesurée hyperfinie est moyennable.*

Introduisons la suite de fonctions caractéristiques renormalisées sur chaque classe :

$$\lambda^n(x,y) = |\mathcal{R}_n[x]|^{-1}\mathbf{1}_{(x,y)\in\mathcal{R}_n}.$$

Vérifions que (λ^n) vérifie les conditions de Reiter. Par construction, pour tout $x \in X$, $\lambda^n_x \in \ell^1(\mathcal{R}[x])$ et $\|\lambda^n_x\|_1 = 1$. Par ailleurs, pour tout $(x,y) \in \mathcal{R}$, on a $\lambda^n_x - \lambda^n_y = 0$ dès que $(x,y) \in \mathcal{R}_n$, ce qui survient immanquablement quand n dépasse un certain n_0. En particulier $\|\lambda^n_x - \lambda^n_y\|_1 \to 0$ comme requis.

Exercice 26. *Toute relation pmp infinie ergodique contient la relation hyperfinie infinie.*

On va utiliser un exercice précédent : si $\mathcal{R}$ est ergodique, alors pour tous boréliens $A, B \subseteq X$ de même mesure il existe un isomorphisme partiel $A \to B$ dans $\mathcal{R}$. Identifions X avec $[0,1]$. Alors pour tous k, n avec $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$, il existe un élément de $[[\mathcal{R}]]$:

$$\varphi_{k,n} : \left[0, 2^{-n}\right] \to \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$$

Puis $\varphi_{k,j,n} = \varphi_{j,n}\varphi_{k,n}^{-1}$. Alors la relation $\mathcal{R}_n$ engendrée par les $(\varphi_{k,j,n})_{k,j}$ est finie à classes de cardinal 2^n, et $\mathcal{R} = \cup_n \uparrow \mathcal{R}_n$ est la relation hyperfinie infinie.

Exercice 27. *Une union croissante de relations pmp hyperfinies est hyperfinie.*

Exercice 28 (Un cas particulier du théorème de Dye sur l'hyperfinitude)**.** *Soit une relation pmp $\mathcal{R} = \cup_n \uparrow \mathcal{R}_n$ hyperfinies telle que toutes les classes de $\mathcal{R}_n$ ont cardinal 2^n. Alors $\mathcal{R}$ est isomorphe à la relation d'orbites de (4).*

Exercice 29. *Toute action pmp de $\mathbb{Z}$ produit une relation d'orbite hyperfinie.*

La preuve est illustrée sur la figure 5.2.

Soit $\mathcal{R}$ une action de $\mathbb{Z}$, s un générateur. Ecrivons $\mathcal{R}_f$ (resp. $\mathcal{R}_\infty$) l'union des classes finies (resp. infinies). Soit X_∞ le lieu des orbites infines. On peut supposer X_∞ non négligeable et il suffit de montrer que $\mathcal{R}_\infty$ est hyperfinie. D'après un exercice précédent, il existe une suite (E_n) décroissante de sections complètes pour $\mathcal{R}_\infty$ d'intersection négligeable. Pour tout $x \in X_\infty$, on considère $\mathcal{R}_n$ définie par :

$$\mathcal{R}_n[x] = \left\{s^{-j_n}(x)x, \dots, s^{-1}x, x, sx, \dots s^{k_n}(x)x\right\}$$

où $j_n(x)$ (resp. $k_n(x)$) est le plus grand (resp. le plus petit) entier $i \leqslant 0$ (resp. $\geqslant 0$) tel que $s^i x \in E_n$. Puisque E_n est une section complète, il est μ-presque certain que j_n ou k_n est fini ; puis le théorème de récurrence de Poincaré assure que j_n **et** k_n sont μ-p.s. finis. Enfin, on a bien $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_{n+1}$ (car $E_n \subset E_{n+1}$) et $\mathcal{R} = \cup_n \mathcal{R}_n$ à une erreur négligeable près, car $\mu(E_n) \to 0$.

Exercice 30. *Toute relation pmp hyperfinie est la relation des orbites d'une action de $\mathbb{Z}$.*

Soit $\mathcal{R} = \cup_n \uparrow \mathcal{R}_n$ une relation pmp hyperfinie sur $X \simeq [0,1]$. Quitte à se restreindre au lieu des orbites infinies, on peut se restreindre aux orbites infinies. On va construire par récurrence une suite s_n d'applications telle que :

— $\{s_n\}$ graphe (au moins) linéairement $\mathcal{R}_n$: pour toute classe de $\mathcal{R}_n$ il existe x_0 dans cette classe tel que $\mathcal{R}_n[x_0] = \{x_0, sx_0, \dots s^r x_0\}$

— s_{n+1} étend s_n

— $\mu(\mathrm{dom}(s_n)) \to 1$.

Supposons s_n construite. Chaque classe de $\mathcal{R}_{n+1}$ est partitionnée par des classes $R_1, \dots R_p$ de $\mathcal{R}_n$. On suppose ordonnées ces classes selon leur plus grand élément (c'est possible, car elles sont

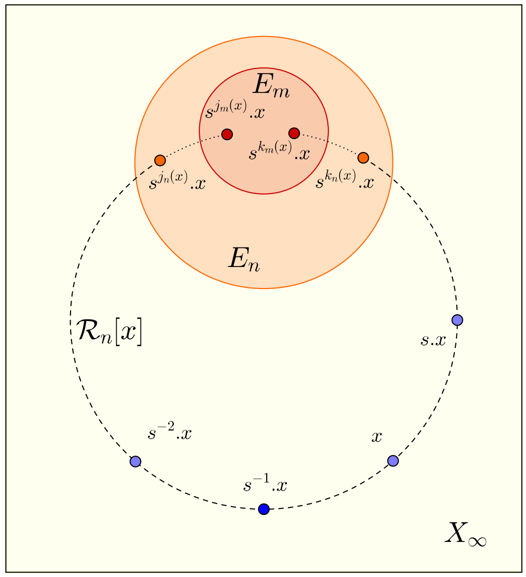

FIGURE 2 – Toute action de $\mathbb{Z}$ produit une relation hyperfinie (exercice 29).

finies, et en nombre fini). On écrit alors

$$R_i = \{x_i, sx_i, \ldots s^{r_i}x_i\},$$

puis on prolonge s_n en s_{n+1} en envoyant l'élément $s_n^{r_i}x_i$ sur x_{i+1} pour $i < p$. Par ailleurs, si $p = 1$ et si $(\mathcal{R}_k[x_1])_k$ est stationnaire à partir de n (c'est le cas pour un certain n sur le lieu des classes finies) on pose $s_{n+1}(x_1^{r_1}) = x_1$. On vérifie que les applications s_n ainsi construites sont bien des bijections boréliennes (par exemple, en reproduisant la démarche de l'exercice 10). Enfin, par construction, le complémentaire X_n de $\mathrm{dom}(s_n)$ dans le lieu des classes infinies X_∞ est l'ensemble des x dans les classes infines de $\mathcal{R}$ tels que $x = \sup \mathcal{R}_n[x]$. L'ensemble $\cap_n X_n$ est un domaine fondamental pour $\mathcal{R}_\infty \mid \mathcal{R}_\infty \cap_n X_n$; mais cette relation est à classes infinies, donc $\mu(\mathrm{dom}(s_n) \cap X_\infty) \to \mu(X_\infty)$. On traite de même le lieu des classes finies. Finalement, on part de s_0 définie (par exemple) grâce à la construction à partir de l'application s_{-1} vide définie sur la relation $\mathcal{R}_{-1}$ définie comme l'égalité. On prend pour s le recollement des s_n. $\mathcal{R}$ est la relation d'orbite de l'action de $\mathbb{Z} = \langle s \rangle$.

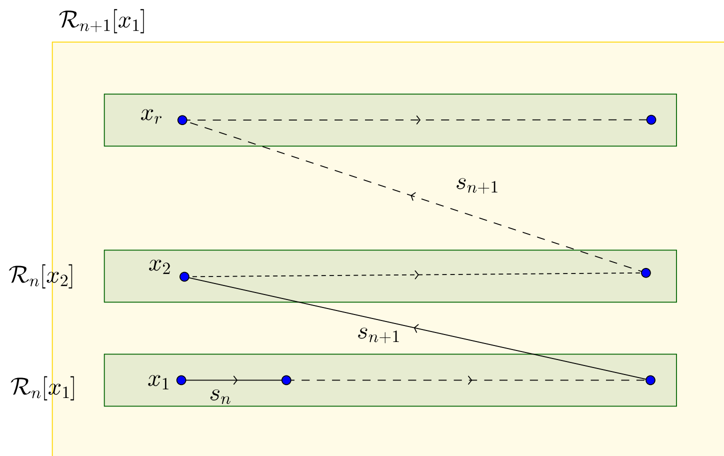

FIGURE 3 – Construction de s_{n+1} à partir de s_n

6 Coût des relations d'équivalence et des groupes

6.1 Rappels de cours

Définition 7 (Coût)**.** *Le coût d'un graphage $\Phi = (\varphi_i)_{i \in I}$ est son nombre d'éléments pondéré par la mesure de leur domaine :*

$$\mathcal{C}(\Phi) = \sum_i \mu(\mathrm{dom}(\varphi_i)) = \sum_i \mu(\mathrm{but}(\varphi_i)).$$

C'est aussi une mesure de la valence moyenne de $\mathcal{L}_\Phi$, cf. exercice 32. Le coût d'une relation $\mathcal{R}$ est l'infimum des coûts des graphages Φ qui engendrent $\mathcal{R}$. Le coût d'un groupe Γ est l'infimum [1] des coûts des actions **libres** de Γ. Pour ces actions libres, un graphe de Cayley pointé dans chaque orbite graphe entièrement $\mathcal{R}_\Gamma$, ainsi le coût est majoré par $\mathrm{rg}\Gamma$.

Proposition 3 (Levitt 1995)**.** *Pour une relation $\mathcal{R}$ à classes finies, si D est un domaine fondamental :*

$$\mathcal{C}(\mathcal{R}) = 1 - \mu(D). \tag{5}$$

De plus, Φ réalise $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ si et seulement si c'est un arborage.

1. C'est une question ouverte de savoir si ceci est également un supremum

En corollaire, le groupe fini Γ est à prix fixe, de coût $1 - 1/|\Gamma|$. La proposition suivante généralise le cas d'égalité aux relations non plus nécessairement finies. C'est une réciproque partielle du théorème de Gaboriau que l'on énonce plus loin.

Proposition 4. *Si Φ réalise le coût de $\mathcal{R}$ alors Φ est un arborage.*

La preuve fait très fortement appel à l'isomorphisme d'espace mesurés $[0,1] \simeq X$, autrement dit le fait que X est standard ; en particulier elle repose principalement sur le lemme d'approximation de Lusin.

Proposition 5 (Formule d'induction, [**?**])**.** *Soit Y une section complète de $\mathcal{R}$ relation pmp sur (X, μ). Alors :*

1. *$\mathcal{R}$ est arborable ssi $\mathcal{R} \mid Y$ est arborable.*
2. *Les coûts de $\mathcal{R}$ et de la relation induite sont liés par*

$$\mathcal{C}(\mathcal{R}) - 1 = \mu(Y)\left(\mathcal{C}(\mathcal{R} \mid Y) - 1\right). \tag{6}$$

Attention, le coût de $\mathcal{R} \mid Y$ est calculé avec la mesure induite $\mu_Y = \mu(Y)^{-1}\mu_{|Y}$.

La démonstration de Gaboriau [**?**] de la formule d'induction consiste à décomposer un graphage Φ de $\mathcal{R}$ en un arbre vertical Φ_v à racines dans Y et un graphe horizontal Φ_h ; puis à faire glisser Φ_h le long de Φ_v pour obtenir un arborage de $\mathcal{R} \mid Y$.

Corollaire 1. *Si $\mathcal{R}$ est à classe infinies, alors $\mathcal{C}(\mathcal{R}) \geqslant 1$.*

En effet, d'après un exercice précédent, $\mathcal{R}$ admet des sections complètes Y arbitrairement petites ; mais le coût des inductions $\mathcal{R} \mid Y$ doit rester $\geqslant 0$.

Le théorème qui suit est le résultat central du travail de Gaboriau [**?**]. Il permet d'envisager de calculer des coûts.

Théorème 7. *Si $\mathcal{R}$ est une relation pmp et si Ψ est un arborage de $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{C}(\mathcal{R}) = \mathcal{C}(\Psi)$.*

Co-coût et coût des produits directs Soient $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ des relations pmp. On définit le co-coût de $\mathcal{S}$ par rapport à $\mathcal{R}$ comme l'infimum du coût d'un graphage Φ tel que $\mathcal{R} = \mathcal{S} \vee \mathcal{R}_\Phi$. Pour $\mathcal{S}$ une relation infinie, le co-coût vérifie l'inégalité :

$$\mathcal{C}(\mathcal{R}) - \mathcal{C}(\mathcal{S}) \leqslant \mathrm{co}{-}\mathcal{C}(\mathcal{S}, \mathcal{R}) \leqslant \mathcal{C}(\mathcal{R}) - 1. \tag{7}$$

Théorème 8. *Supposons que $\Gamma = \cup_n \uparrow \Gamma_n$, et qu'il existe une suite (γ_n) avec $\Gamma_{n+1} = \langle \gamma_{n+1}, \Gamma_n \rangle$ et*

$$\left|\Gamma_n \cap \gamma_{n+1}^{-1} \Gamma_n \gamma_{n+1}\right| = \infty$$

Alors $\mathrm{co}{-}\mathcal{C}(\mathcal{R}_{\Gamma_0}, \mathcal{R}_\Gamma) = 0$.

Un corollaire important, qui est un cas particulier du théorème, est que si Γ est engendré par une partie chaîne-commutante[2] dont les éléments sont d'ordres infinis, alors le coût de Γ est 1 (c'est le coût de $\langle\gamma_1\rangle \simeq \mathbb{Z}$).

6.2 Exercices

Exercice 31. *Soient θ_1 et θ_2 deux irrationnels, rationnellement indépendants. Soit $\alpha : \mathbb{Z}^2 \curvearrowright S^1$ par rotations r_{θ_1} et r_{θ_2}, I_ε un arc de S^1 de longueur ε. Montrer que $\Phi_\varepsilon = (r_{\theta_1}, r_{\theta_2|I_\varepsilon})$ est un graphage générateur de la relation d'orbite $\mathcal{R}_\alpha$.*

Soient x et y dans S^1 tels que $x\mathcal{R}_\alpha y$, autrement dit il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $y = r_{\theta_1}^{n_1} r_{\theta_2}^{n_2} x$. Quitte à échanger x et y on peut supposer $n_2 \in \mathbb{N}$. En fait, il suffit de montrer que pour tout $x \in S^1$ on a $x\mathcal{R}_{\Phi_\varepsilon}(r_{\theta_2}x)$ car alors le résultat s'ensuit par récurrence sur n_2. Puisque $\langle r_{\theta_1}\rangle \curvearrowright S^1$ est topologiquement transitive, il existe toujours $k_1(x) \in \mathbb{Z}$ tel que $r_{\theta_1}^{k_1} x \in I_\varepsilon$. On écrit alors :

$$r_{\theta_2}x = r_{\theta_1}^{-k_1(x)} \circ r_{\theta_2|I_\varepsilon} \circ r_{\theta_1}^{k_1(x)}(x).$$

Ainsi, Φ_ε est un graphage pour $\mathcal{R}_\alpha$.

Remarque 4. Si l'on pose $K = \sup_{x\in S_1} k_1(x)$, alors la distance de x à $y = y = r_{\theta_1}^{n_1} r_{\theta_2}^{n_2} x$ dans $\mathcal{L}_{\Phi_\varepsilon}$ est majorée par

$$d(x,y) \leqslant |n_1| + 2K|n_2|.$$

D'autre part on a l'inégalité inverse $d(x,y) \geqslant |n_1| + |n_2|$; donc $\mathcal{L}_{\Phi_\varepsilon}$ est quasiisométrique à $\mathcal{L}_{(r_{\theta_1}, r_{\theta_2})}$. Quand $\varepsilon \to 0$, on s'attend à ce que $K = \mathcal{O}(1/\varepsilon)$.

Remarque 5. Conjointement avec le corollaire 1 sur le coût des relations à classes infinies, l'exercice montre élémentairement que $\mathcal{C}\left(\mathbb{Z}^2 \curvearrowright S^1\right)$ par rotations irrationnelles rationnellement indépendantes est 1. On retrouverait ceci avec le théorème sur le coût des actions de groupes moyennables.

Exercice 32. *Le coût d'un graphage Φ s'exprime en intégrant la valence :*

$$\mathcal{C}(\phi) = \frac{1}{2}\int_X v_\Phi(x)d\mu(x) \tag{8}$$

2. C'est une partie (ne contenant pas le neutre) génératrice et connexe si vue comme un graphe dont les arêtes représentent la relation de commutation

C'est une conséquence directe du théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\phi) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in I}\mu(\mathrm{dom}(\varphi_i)) + \sum_{i\in I}\mu(\mathrm{but}(\varphi_i))\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\in I}\int_X (\mathbf{1}_{A_i}(x) + \mathbf{1}_{B_i}(x))\, d\mu(x) \\
&= \frac{1}{2}\int_X v_\Phi(x) d\mu(x).
\end{aligned}$$

Exercice 33 (5.1.16)**.** *Tester la formule d'induction pour une action profinie, où Y est une ombre.*

Exercice 34. *Montrer que les groupes $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_q$ et $\mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$ (avec $d \geqslant 3$) admettent une partie génératrice chaîne-commutante dont les éléments sont d'ordre infini.*

Remarque 6. D'après le cours, ceci implique que ces groupes ont coût 1.

Groupe $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_q$ Soit S une partie génératrice de $\mathbb{F}_p$ et T une partie génératrice de $\mathbb{F}_q$. On considère la partie génératrice $S \times \{0\} \sqcup \{0\} \times T$ de $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_q$. Le graphe de commutation de cette partie est bipartite complet sur les deux cliques formées par $S \times \{0\}$ et $\{0\} \times T$. En particulier il est connexe.

Groupe $\mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$ D'après l'algorithme du pivot de Gauss, ce groupe est engendré par les matrices triangulaires supérieures, triangulaires inférieures, et de permutation alternées :

$$\{T_{ij} = I + E_{ij}\}_{i\neq j} \cup \{D_{ij} = I - 2E_{ii} - 2E_{jj}\}_{i\neq j} \cup \{C_\sigma\}_{\sigma\in\mathfrak{A}_d}.$$

Le groupe $\mathfrak{A}_d$ pouvant être remplacé par un de ses sous-groupes agissant transitivement, par exemple l'orbite d'un d-cycle si d est impair. On vérifie que cette partie est chaîne commutante quand $d \geqslant 3$.

A Examen

Exercice 1. *Pour tout $r \in [1, +\infty)$, il existe une relation pmp ergodique de coût r. Si de plus r est entier, il existe une telle relation donnée par une action libre.*

Premier cas : r est entier Soit $\mathbf{F}_r$ le groupe libre à r générateurs formé sur $S = \{s_1, \dots s_r\}$ et $\mathcal{R}_\alpha$ la relation d'orbite engendrée par l'action Bernoulli $\mathbf{F}_r \curvearrowright (\{0,1\}^{\mathbf{F}_r}, \mu^{\otimes \mathbf{F}_r})$ avec μ la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Alors α est libre et ergodique d'après les exercices du cours. De plus, si Φ est la donnée du graphage $\{\alpha(s_i)\} \cup \{\alpha(s_i^{-1})\}$, alors Φ est de valence uniformément égale à r, et c'est un arborage (ses composantes connexes sont isomorphes à $\mathrm{Cay}(\mathbf{F}_r, S)$). D'après le théorème de Gaboriau ([3], IV.1) le coût de $\mathcal{R}_\alpha$ est égal à celui de Φ, soit r.

Second cas : r est réel Conformément au théorème de Gaboriau on recherche un arborage d'une relation pmp ergodique dont le coût soit r exactement. Soit $R = \lfloor r \rfloor$, et $X = \{0,1\}^{\mathbf{F}_{R+1}}$, mesuré comme précédemment. Supposons donnée A une partie de mesure $r - R$ dans X (une telle partie existe : X est mesurablement isomorphe à $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue). On considère la relation $\mathcal{R}$ sur X engendrée par les s_i sur X pour $i = 1, \dots R$ et s_{R+1} sur A. Le graphage constitué par les s_i est un arborage. Il reste à vérifier que $\mathcal{R}$ est ergodique. Pour cela, on peut reprendre la preuve de l'ergodicité de l'action de Bernoulli dans les exercices du cours, en observant que pour toute partie finie $F \subset \mathbf{F}_{R+1}$, il existe $\gamma \in \langle s_1, \dots s_R \rangle$ qui disjoint F d'elle-même (d'après le lemme de Neumann).

Exercice 2. OE *est une relation d'équivalence entre groupes dénombrables.*

On renvoie à l'exercice 7.

A.1 Problème 1

On souhaite démontrer le

Théorème A. *Si Φ est un arborage d'une relation pmp libre d'un groupe dénombrable Γ, alors $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Gamma)$.*

Question A.1.1. *On admet qu'une relation pmp ergodique infinie $\mathcal{R}$ est hyperfinie ssi elle admet un graphage de coût 1, ainsi que le théorème A.*

(a) Montrer qu'un groupe non moyennable de coût 1 n'admet aucune action arborable.

(b) Donner un exemple de tel groupe.

(a) Soit G un groupe de coût 1 qui n'est pas moyennable. Si par l'absurde G admet une action α libre qui est arborable, alors elle est de coût 1 (car elle réalise le coût de G, d'après le théorème A). Comme α est libre, les classes de $\mathcal{R}_\alpha$ sont infinies (G est infini sinon il serait moyennable), donc chaque composante ergodique a un coût qui est $\geqslant 1$ (pour la mesure renormalisée), donc nécessairement égal à 1, et quitte à éventuellement restreindre à une composante, on peut supposer que α est ergodique. D'après l'assertion admise, $\mathcal{R}_\alpha$ est hyperfinie, donc moyennable. Or c'est une action libre, donc G est moyennable, ce qui constitue une contradiction.

(b) D'après un exercice du cours, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ pour $n \geqslant 3$ admet une partie génératrice finie chaîne-commutante, donc est de coût 1. Pour autant ces groupes ne sont pas moyennables, parce qu'ils vérifient la propriété (T) de Kazhdan sans être finis [3].

Dans la suite, $\alpha_1 : \Gamma \curvearrowright (X_1,\mu_1)$ et $\alpha_2 : \Gamma \curvearrowright (X_2,\mu_2)$ sont deux actions pmp libres d'un groupe dénombrable Γ.

Question A.1.2. *Etant donné un graphage $\Phi = \{\phi_i\}$ de α_1, montrer que l'on peut modifier Φ sans modifier son coût de telle manière que chaque élément coïncide sur son domaine de définition avec l'action par un élément de Γ.*

Chaque ϕ_i est un isomorphisme partiel de $\mathcal{R}_\alpha$, en particulier son domaine admet une partition mesurable $\mathrm{dom}(\phi_i) = \sqcup_{\gamma\in\Gamma} A_{\gamma,i}$ telle que $(\phi_i)_{|A_{\gamma,i}} = \alpha_1(\gamma)_{|A_{\gamma,i}}$. Soit $\Phi' = \{\phi_{\gamma,i}\}_{i,\gamma}$ le graphage obtenu. Alors

$$\mathcal{C}(\Phi) = \sum_i \mu\left(\mathrm{dom}(\phi_i)\right) = \sum_{\gamma,i} \mu\left(\mathrm{dom}(\phi_{\gamma,i})\right) = \mathcal{C}(\Phi').$$

Le coût n'est pas changé.

Question A.1.3. *Soit $\alpha_1 \times \alpha_2$ l'action diagonale de Γ sur $X_1 \times X_2$. Alors*

(a) $\mathcal{C}(\mathcal{R}_{\alpha_1\times\alpha_2}) \leqslant \mathcal{C}(\mathcal{R}_{\alpha_1})$

(b) Si $\mathcal{R}_{\alpha_1}$ est arborable, alors $\mathcal{R}_{\alpha_1\times\alpha_2}$ l'est également.

(a) Soit Φ un graphage de $\mathcal{R}_{\alpha_1}$ donné par la question précédente ; on écrit $\Phi = \{\phi_i\}$ et $A_i = \mathrm{dom}(\phi_i)$. Comme suggéré par l'énoncé, on introduit le graphage $\Psi = \{\psi_i\}$ avec $\mathrm{dom}(\psi_i) = A_i \times X_2$ et $\psi_i(x_1,x_2)s = (\gamma_i x_1, \gamma_i x_2)$.
Vérifions que Ψ engendre $\mathcal{R}_{\alpha_1\times\alpha_2}$: quel que soit $((x_1,x_2),(x_1',x_2')) \in \mathcal{R}_{\alpha_1\times\alpha_2}$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $x_1' = \alpha_1(\gamma)x_1$,$x_2' = \alpha_2(\gamma)x_2$. Puisque Φ engendre α_1, il existe $\phi_{i_1}\ldots\phi_{i_r}$ tels que $x_1' = \phi_{i_1}\cdots\phi_{i_r}x_1 = \alpha_1(\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_r})x_1$ avec $\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_r} = \gamma$ puisque α_1 est libre. Finalement $(x_1',x_2') = \psi_{i_1}\cdots\psi_{i_r}(x_1,x_2)$. De plus,

$$\mathcal{C}(\Psi) = \sum_i \mu_1(\mathrm{dom}(\phi_i)) \times \mu_2(X_2) = \sum_i \mu_1(\mathrm{dom}(\phi_i)) = \mathcal{C}(\phi)$$

Puisque le coût de $\mathcal{R}_{\alpha_1\times\alpha_2}$ est l'infimum des coûts de ses graphages, $\mathcal{C}(\mathcal{R}_{\alpha_1\times\alpha_2}) \leqslant \mathcal{C}(\Psi) = \mathcal{C}(\Phi)$, d'où finalement l'inégalité demandée.

3. D'après la condition de Hulanicki-Reiter, un groupe discret, moyennable et qui vérifie la propriété (T) est fini.

(b) Si Φ est un arborage, Ψ l'est également : si $\psi_{i_1} \cdots \psi_{i_r}(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ alors $\Phi_{i_1} \cdots \Phi_{i_r}(x_1) = x_1$, ce qui ne peut se produire que pour x_1 dans un ensemble de mesure nulle.

Question A.1.4. *Preuve du théorème A.*

Soit Φ un arborage d'une relation pmp libre α_1 du groupe Γ. Pour tout $\varepsilon \geqslant 0$, il existe α_2 une action libre pmp telle que $\mathcal{C}(\alpha_2) \leqslant \mathcal{C}(\Gamma) + \varepsilon$. D'après (a) de la question précédente, $\mathcal{C}(\alpha_1 \times \alpha_2) \leqslant \mathcal{C}(\alpha_2)$ donc $\mathcal{C}(\alpha_1 \times \alpha_2) \leqslant \mathcal{C}(\Gamma) + \varepsilon$. De plus, d'après (b) de la question précédente,le graphage Ψ obtenu est un arborage, donc réalise le coût de $\mathcal{R}_{\alpha_1 \times \alpha_2}$, ce qui donne $\mathcal{C}(\alpha_1) \leqslant \mathcal{C}(\Gamma) + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. Faisant tendre ε vers 0, ceci permet de conclure.

A.2 Problème 2 : Coût des sous-groupes d'indice fini

L'objectif est de démontrer le

Théorème B. *Soient Γ un groupe dénombrable et Λ un sous-grope d'indice fini. Alors*

$$\mathcal{C}(\Lambda) - 1 = [\Gamma : \Lambda] \left(\mathcal{C}(\Gamma) - 1\right).$$

Question A.2.1. *$\widetilde{\beta}$ induit une action libre $\overline{\beta}$ sur le quotient $\overline{X} = \widetilde{X}/\widetilde{\alpha}$.*

Puisque les actions $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ commutent, l'action $\widetilde{\beta}$ respecte les orbites de $\widetilde{\alpha}$ dans $\widetilde{X}$. Donc l'action $\overline{\beta}$ est bien définie sur $\overline{X}$. Vérifions que $\overline{\beta}$ est libre : étant donné $g \in \Gamma$, dire que $\overline{\beta}(g)$ fixe la classe $\overline{(x, \gamma)} \in \overline{X}$, c'est dire qu'il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $x = \alpha(\lambda)x$ et $g\gamma = \gamma\lambda^{-1}$. Soit ν la mesure de comptage sur Γ. Alors

$$(\mu \otimes \nu) \left\{(x, \gamma) \in \widetilde{X} : \alpha(\gamma^{-1}g^{-1}\gamma)x = x\right\} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu \left\{x \in X : \alpha(\gamma^{-1}g^{-1}\gamma)x = x\right\} = 0,$$

tous les termes de la somme étant nuls puisque α est libre. Ceci implique en particulier que $\overline{\beta}$ est essentiellement libre.

Question A.2.2. *$\overline{X}$ s'identifie mesurablement à $X \times \Gamma/\Lambda$ muni de la mesure produit, et a pour mesure totale $[\Gamma : \Lambda]$.*

Soit $\pi : \Gamma \to \Gamma/\Lambda$ la projection canonique et $s : \Gamma/\Lambda \to \Gamma$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}$. On définit

$$\begin{aligned} f : \widetilde{X} &\longrightarrow X \times \Gamma/\Lambda \\ (x, \gamma) &\mapsto \left(\left(s \circ \pi(\gamma)\right)^{-1} \gamma \cdot_{\alpha} x, \pi(\gamma)\right) \end{aligned}$$

Alors f est surjective : si l'on se donne $(x,c) \in X \times \Gamma/\Lambda$, alors $f(x,s(c)) = (1.x,c) = (x,c)$. Par ailleurs pour tout $\lambda \in \Lambda$, et $(x,\gamma) \in \widetilde{X}$,

$$f\left(\lambda._{\widetilde{\alpha}}(x,\gamma)\right) = \left((s\circ\pi(\gamma))^{-1}\gamma\lambda^{-1}\lambda._{\alpha}x, \pi(\gamma\lambda^{-1})\right) = f\left(x,\gamma\right),$$

donc f est $\widetilde{\alpha}$-invariante, ce qui permet de définir $\overline{f}$ sur $\overline{X}$. Par ailleurs si $f(x,\gamma) = f(x',\gamma')$ alors $\pi(\gamma) = \pi(\gamma')$, donc il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $\gamma' = \gamma\lambda^{-1}$; mais alors l'égalité entre les deux premières composantes donne $(s\circ\pi(\gamma))^{-1}\gamma._{\alpha}x = (s\circ\pi(\gamma))^{-1}\gamma\lambda^{-1}._{\alpha}x'$; étant donnée la liberté de α, $x' = \alpha(\lambda)x$ et $(x',\gamma') = \widetilde{\alpha}(\gamma)(x,\gamma)$. Ceci établit la bijectivité de $\overline{f}$. Pour finir, si l'on écrit, pour tout $c \in \Gamma/\Lambda$

$$\overline{X}_c = \left\{\overline{(x,\gamma)} \in \overline{X} : \pi(\gamma) = c\right\},$$

alors $\overline{f}$ est le recollement des applications $\overline{f}_c : \overline{X}_c \to X \times \{c\}$. Il reste à vérifier que $\overline{f}_c$ est un isomorphisme mesuré $(\overline{X}_c, \overline{\mu}_{|\overline{X}_c}) \to (X \times \{c\}, \mu \otimes \delta_c)$, ce qui découle du caractère pmp de α.

Tentative de rédaction plus concise Via $\widetilde{\alpha}$, le groupe Λ opère sur l'espace total de $\xi : \widetilde{X} \to \Gamma/\Lambda$ en respectant les fibres ; plus précisément $\widetilde{\alpha}$ est l'action diagonale $\alpha \times \alpha'$ sur $X \times \Gamma$, où α' est l'action naturelle de Λ sur Γ par translation à droite. Puisque α est libre, tout choix d'un système de représentants pour $\mathcal{R}_{\alpha'}$ donne une identification $\widetilde{X}/\widetilde{\alpha} \simeq \widetilde{X}/(\mathbf{1} \times \alpha') = X \times \Gamma/\Lambda$.

Finalement, étant donné l'isomorphisme d'espace mesuré $(X, \overline{\mu}) \simeq (X \times \Gamma/\Lambda, \mu \otimes \nu')$ où ν' est la mesure de comptage sur Γ/Λ, ces deux espaces ont même mesure totale égale à $|\Gamma/\Lambda| = [\Gamma : \Lambda]$.

Question A.2.3. *En restriction à $X \times \{1\}$, l'application $\pi : \widetilde{X} \to \overline{X}$ est injective, et induit un isomorphisme entre les relations $\mathcal{R}_\alpha$ sur $X \times \{1\}$ et $\mathcal{R}_{\overline{\beta}}$ restreinte à $\overline{X}_\Lambda = \pi(X \times \{1\})$.*

Supposons que $(x,1)$ et $(x',1)$ sont dans la même $\widetilde{\alpha}$-orbite ; alors si λ est tel que $\widetilde{\alpha}(\lambda)(x,1) = (x',1)$ nécessairement $\lambda = 1$ (quitte à examiner le second facteur). Donc $x = x'$ et π est injective en restriction à $X \times \{1\}$. Ensuite, si $(x,x') \in \mathcal{R}_\alpha$ si alors il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $x' = \alpha(\lambda)x$, mais alors (x',λ^{-1}) est dans $\pi(x,1)$, donc $\pi(x',1)$ est dans la $\overline{\beta}$-orbite de $\pi(x,1)$ dans $\overline{X}$. Inversement, supposons que $(\pi(x,1),\pi(x',1)) \in \mathcal{R}_{\overline{\beta}}$, et soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $\beta(\gamma)(x,1) \sim_{\widetilde{\alpha}} (x',1)$. Nécessairement, un tel γ doit être dans Λ puisque $\widetilde{\alpha}$ respecte la classe à droite modulo Λ du second facteur. Mais alors $x' = \alpha(\gamma)x$, et donc $(x,x') \in \mathcal{R}_\alpha$.

Question A.2.4. *En utilisant la formule d'induction, établir*

$$\mathcal{C}(\Lambda) - 1 \geqslant [\Gamma : \Lambda]\,(\mathcal{C}(\Gamma) - 1) \tag{9}$$

Dans $\overline{X}$, la partie $Y = \overline{X}\Lambda = \pi(X \times \{1\})$ rencontre toutes les orbites de $\overline{\beta}$, donc d'après la formule d'induction ([2] 5.1.15) dans l'espace renormalisé $(\overline{X}, \frac{\overline{\mu}}{[\Gamma:\Lambda]})$,

$$\mathcal{C}(\mathcal{R}_{\overline{\beta}}) - 1 = \frac{\overline{\mu}\left(\overline{X}_\Lambda\right)}{[\Gamma : \Lambda]}(\mathcal{C}(\mathcal{R}_{\overline{\beta}|\overline{X}_\Lambda} - 1) = \frac{1}{[\Gamma : \Lambda]}(\mathcal{C}(\mathcal{R}_{\overline{\beta}|\overline{X}_\Lambda} - 1).$$

D'après la question A.2.1, $\overline{\beta}$ est une action libre de Γ, donc le premier membre est supérieur ou égal à $\mathcal{C}(\Gamma) - 1$. Et d'après A.2.3, $(\mathcal{C}(\mathcal{R}_{\overline{\beta}|\overline{X}_\Lambda} - 1) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_\alpha)$. Quitte à prendre α telle que $\mathcal{C}(\mathcal{R}_\alpha)$ est arbitrairement proche de $\mathcal{C}(\Lambda)$, on obtient (9).

A.3 Problème 3 : Un groupe moyennable contenant un semi-groupe libre

Question A.3.1. *Dans le groupe $G = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \rtimes \mathbb{Z}$, la partie $S = \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}$ est génératrice.*

Soit $(u, v) \in G$; on écrit $u = u_0/2^k$ où $u_0 \in \mathbb{Z}$ et k est minimal dans $\mathbb{N}$ permettant cette écriture. Alors on peut décomposer (u, v) en

$$(u, v) = (0 + 2^{-k}u_0, -k + v + k) = (0, -k) * (u_0, v + k) = (0, -1)^k * (1, 0)^{u_0} * (0, 1)^{v+k}.$$

Question A.3.2. *G est moyennable.*

$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}[1/2]$ sont abéliens, donc moyennables. G est une extension de groupes moyennable ; d'après le cours, G est moyennable (3.1.14.(iii) dans [2]).

Question A.3.3. *Donner une suite de Følner dans G.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons l'ensemble

$$F_n = \left\{ \left(\frac{u_0}{2^n}, k \right) : |u_0| \leqslant 5^n,\ |k| \leqslant n \right\}$$

Observons que $|F_n| \sim 4n \cdot 5^n$, puis que

$$\left(\frac{u_0}{2^n}, k \right) * (0, \pm 1) = \left(\frac{u_0}{2^n}, k \pm 1 \right) \tag{10}$$

$$\left(\frac{u_0}{2^n}, k \right) * (\pm 1, 0) = \left(\frac{u_0 + 2^{n \pm k}}{2^n}, k \right), \tag{11}$$

Pour tout $k \in \{-n, \dots n\}$ on a $2^{n \pm k} \in \mathbb{N}$ et $2^{n \pm k} \leqslant 2^{2n} = 4^n$, de sorte que pour tout $s \in S$, $F_n s \subseteq F'_n$, avec

$$F'_n = \left\{ \left(\frac{v_0}{2^n}, j \right) : |v_0| \leqslant 5^n + 4^n, |j| \leqslant n + 1 \right\}.$$

Finalement

$$|F'_n| \sim 4(n + 1)\,(5^n + 4^n) \sim 4n \cdot 5^n \sim |F_n|,$$

et puisque F_n et $F_n s$ sont inclus dans F'_n, le quotient $\frac{|F_n s \Delta F_n|}{|F_n|}$ tend vers 0 ; F_n est une suite de Følner à droite pour S (et de là pour toute partie finie).

Question A.3.4. *Tout groupe de type fini contenant un semi-groupe libre est à croissance exponentielle.*

Soit G un groupe de type fini, $a, b \in G$ tels que a et b engendrent un semi-groupe libre. Soit S une partie génératrice de G. On peut décomposer a et b sous la forme

$$a = s_0 s_1 \cdots s_{r_a}$$

$$b = t_0 t_1 \cdots t_{r_b},$$

avec les s_i et t_i dans S. Quitte à échanger a et b, on suppose $r_a \leqslant r_b$. Alors pour tout $n \geqslant 1$, S^n contient $\{a, b\}^{\lfloor n/r_b \rfloor}$, qui est de cardinal $2^{\lfloor n/r_b \rfloor}$ car a et b engendrent un semi-groupe libre. Donc G est à croissance exponentielle.

Question A.3.5. *En plongeant G dans $\mathrm{Aff}^+(\mathbb{R})$, et en observant l'opération du semi-groupe engendré par $g = (0, -3)$ et $h = (1, -3)$ sur les parties $A = [-1/4, 1/4]$ et $B = [3/4, 5/4]$ montrer que g et h engendrent un semi-groupe libre.*

On remarque au préalable que $A \cup B$ est stable par g et h, $g(A \cup B) \subset A$ et $g(A \cup B) \subset B$ (cf. figure 4). Soit M le semi-groupe libre engendré par g et h. D'après le lemme du ping-pong version semi-groupes [5, VII.2], M est libre.

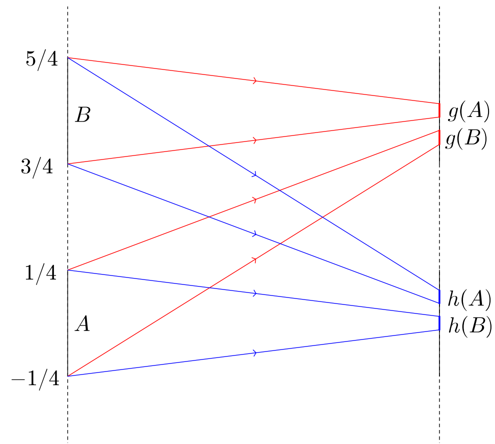

FIGURE 4 – g et h dans le groupe affine de $\mathbb{Z}[1/2]$

B Croissance des groupes Heis et Sol

Exercice 3. *Déterminer (et comparer) la croissance des groupes* $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z})$ *et* $\mathrm{Sol}(\mathbb{Z})$.

Groupe de Heisenberg Pour calculer la croissance de $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z})$, nous utiliserons le système à deux générateurs $\{x,\, y\}$ dans la présentation suivante :

$$\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z}) = \langle x, y \mid [x,[x,y]], [y,[x,y]] \rangle$$

Pour plus de commodité on donnera la lettre z à $[x, y]$. Il découle de la présentation que tout élément s'écrit sous la forme $z^c y^b x^a$ pour un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$; on écrit (α, β, γ) la bijection vers $\mathbb{Z}^3$ correspondante. Le sous-groupe dérivé est le groupe monogène engendré par z ; il est central d'après la présentation, donc $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z})$ est un groupe nilpotent d'indice 2, extension (non scindée) de $\mathbb{Z}^2$ par $\mathbb{Z}$:

$$1 \to \mathbb{Z} \underset{\text{centr.}}{\longrightarrow} \mathrm{Heis}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{(\alpha,\beta)} \mathbb{Z}^2 \to 1$$

Il existe une formule pour la croissance des groupes nilpotents, dûe à Bass et Guivarc'h (voir par exemple [4, Théorème II.1]) : celle-ci est polynomiale [4] avec pour ordre la somme des rangs des quotients successifs de la suite centrale descendante pondérés par leur ordre d'apparition. Ici donc la croissance est polynômiale de degré $d = \mathrm{rg}(\mathbb{Z}^2) + 2 \times \mathrm{rg}(\mathbb{Z}) = 4$. Mais nous allons retrouver ceci dans par une démarche élémentaire plus spécifique à $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z})$.

On munit $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z})$ de la distance de mots associée à $\{x, y\}$. La projection $\pi = (\alpha, \beta)$: $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}^2$ est lipschitzienne ; si l'on se représente $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z})$ via (α, β, γ) dans $\mathbb{Z}^3$, ceci contraint les boules à se placer dans des cylindres à base carrée. Il reste à estimer leur étendue verticale afin pour les confiner dans des prismes $\mathcal{P}_{\Pi,\Gamma} = \{|\pi| \leqslant \Pi, |\gamma \leqslant \Gamma\}$; puis à évaluer comment elles remplissent ces prismes. On commence par un lemme géométrique (un plus précis que ce que nous voulons démontrer) qui permettra d'obtenir la minoration :

Lemme 5. *Soient s un entier naturel, $a_1, \dots a_s, b_1, \dots b_s$ des entiers relatifs tels que*

$$a_1 + \cdots + a_s = b_1 + \cdots + b_s = 0.$$

Alors $x^{a_1} y^{b_1} \cdots x^{a_s} y^{b_s} = z^c$, où c est égal à l'aire algébrique délimitée par le lacet de $\mathbb{Z}^2$:

$$0 \rightsquigarrow (a_1, 0) \rightsquigarrow (a_1, b_1) \rightsquigarrow (a_1 + a_2, b_1) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow (0, b_1 + \cdots + b_{s-1}) \rightsquigarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{L}$ le groupe des lacets de $\mathbb{Z}^2$ pointés en 0 ; à tout lacet ℓ correspond une expression formelle $x^{a_1} y^{b_1} \cdots x^{a_s} y^{b_s}$ dans le groupe $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z})$ et on considère le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L} &\to \mathbb{Z} \\ \ell &\mapsto \gamma(x^{a_1} y^{b_1} \cdots x^{a_s} y^{b_s}) \end{aligned}$$

D'image abélienne, φ se factorise en $\overline{\varphi} : \mathcal{L}^{\mathrm{ab}} \to \mathbb{Z}$; mais il y a un isomorphisme naturel h : $\mathcal{L}^{\mathrm{ab}} \simeq \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est le groupe des cycles de $\mathbb{Z}^2$, de sorte qu'on récupère $\overline{\varphi} : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}$. A présent, $\mathcal{C}$ est un $\mathbb{Z}$-module, muni d'une action $\mathbb{Z}$-linéaire du groupe $\mathbb{Z}^2$ par translations. Comme $\langle z \rangle$ est central dans $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z})$, $\overline{\varphi}$ est invariante par translations ; c'est donc un multiple entier de la mesure d'aire algébrique $\alpha : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}$. Finalement il suffit de vérifier la formule pour un petit carré $\square^+$ orienté dans le sens positif :

$$\overline{\varphi}\left(\square^+\right) = \gamma(xyx^{-1}y^{-1}) = 1.$$

Ceci conclut. □

Le lemme sert pour la minoration de la croissance dans Heis. En effet, on en déduit directement que la boule de rayon $4n$ pour la distance algébrique contient $\{z^{-n^2}, \dots z^{n^2}\}$. Ainsi la boule de

4. D'après un autre théorème, dû à Gromov, la croissance polynomiale *caractérise* les groupes virtuellement nilpotent parmi les groupes de type fini.

rayon $6n$ contient tous les éléments de la forme $z^k y^b x^a$, avec $|k| \leqslant n^2$ et $|a|, |b| \leqslant n$. Ces éléments sont tous distincts, et leur nombre est donc $(2n+1)^2 \times n^2 \sim 2n^4$.

Pour la majoration, remarquons simplement que si l'on prend $s \in \mathrm{Heis}$ et qu'on le multiplie par $t \in \{x, y\}$ à droite, alors

$$|\gamma(st)| \leqslant |\gamma(s)| + |\beta(s)|.$$

Puisque $|\beta(s)| \leqslant |s|$, on obtient par récurrence que $|\gamma(s)| \leqslant C|s|^2$ pour une certaine constante s.

Groupe $\mathrm{Sol}(\mathbb{Z})$ Nous allons montrer que la croissance du groupe $\mathrm{Sol}(\mathbb{Z})$ est exponentielle. Dans un sens, c'est une bonne nouvelle, car il suffit d'établir une minoration exponentielle. Soit $H \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique. On réalise le groupe $\mathrm{Sol}(\mathbb{Z})$ comme le produit semidirect $\mathrm{Sol}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$, où l'action $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{Z}^2$ est donnée par

$$s.z = H^s z.$$

On s'intéresse à la distance algébrique dist sur Sol formée sur le système de six générateurs formé par $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ et leurs inverses dans $\mathrm{Sol}(\mathbb{Z})$.

Le spectre de H est de la forme $S = \{\varphi, \widehat{\varphi}\}$ avec $|\varphi| > 1$ et $\widehat{\varphi} = 1/\varphi$. Soient u et v des vecteurs propres unitaires (pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$) de H pour les valeurs propres respectives φ et $\widehat{\varphi}$. Pour simplifier la preuve, on supposera dans ce qui suit $\varphi > 0$, mais ce n'est pas nécessaire.

Soit $\delta > 1$. On appelle δ - *bande stable* l'ensemble des $w \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|e^{\star}_{\widehat{\varphi}}(w)| < \delta$. La terminologie s'explique comme suit : ce sont des points proches de la variété stable $\mathbb{R}e_{\widehat{\varphi}}$ pour la dynamique de H sur $\mathbb{Z}^2$.

Nous allons atteindre le résultat en montrant que si $(x, y, t) \in \mathrm{Sol}$ est tel que (x, y) est dans la δ-bande stable et assez grand, alors il existe $(x', y', t') \in \mathrm{Sol}$ tel que

— (x', y') est dans la δ-bande stable
— $\|(x', y')\| \leqslant \sqrt{\varphi}\|(x, y)\|$
— $\mathrm{dist}\,((x, y, t), (x', y', t')) < c$

où c est une constante qui ne dépend que de δ et φ. Ceci permet de conclure ; en effet le nombre de points dans la δ-bande stable de norme $\leqslant 2^n$ grandit exponentiellement avec n.

Remarque 7. On ne se soucie pas de l'étendue verticale (selon $\mathbb{Z}$) des boules de dist, celle-ci est au plus linéaire.

La preuve est illustrée sur la figure B. On commence par poser $(x_1, y_1, t_1) = (x, y, t)(0, 0, -1)$. Alors pour (x, y) assez grand, $\|(x_1, y_1)\| < \sqrt[3]{\varphi}\|(x, y)\|$. Soit (x_1, y_1) est dans la δ - bande stable, auquel cas on prend $(x', y', t') = (x_1, y_1, t_1)$, soit ce n'est pas le cas ; mais alors (x_1, y_1) est quand même dans la $\delta\varphi$ - bande stable. Quitte à multiplier à droite par $(\pm 1, 0, 0)$ et $(0, \pm 1, 0)$ un nombre de fois au plus égal à $K\delta(\varphi - 1)$, on trouve $(x_2, y_2, t_2) \in \mathrm{Sol}$ qui convient. De plus, pour (x, y) assez grand, $\|(x_1, y_1)\| < \sqrt{\varphi}\|(x, y)\|$. Ceci conclut la preuve.

Remarque 8. La preuve donne une idée de la forme des boules dans Sol : celles-ci sont aplaties, et très étendues dans les directions des bandes stable et instable ; c'est une étoile à quatres branches,

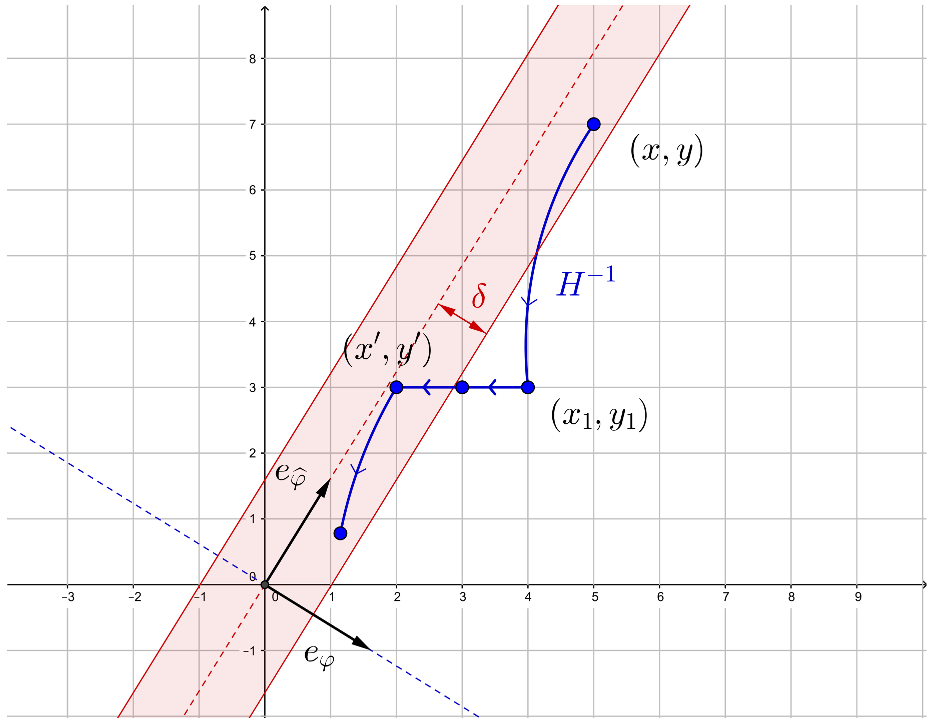

FIGURE 5 – Croissance exponentielle du groupe Sol

un peu plus épaisse au centre [5].

5. On montre aussi qu'il est possible de faire rejoindre à (x, y, t) une bande stable en un temps de l'ordre de $\log \|(x, y)\|$; ainsi la croissance dans les autres directions horizontales est également assez rapide.

C Compléments de théorie de la mesure

On énonce ici quelques résultats indépendants qui sont utilisés dans les exercices.

Théorème C (Classification des boréliens standards)**.** *Soit X un espace borélien standard (i.e. un borélien d'un espace polonais). Alors X est isomorphe à $[0,1]$, $\mathbb{Z}$ ou un ensemble fini.*

Théorème D (Classification des ebs de proba)**.** *Soit μ une mesure de probabilité sur un ebs. Alors μ est isomorphe à une combinaison linéaire de $([0,1], \mathrm{Lebesgue})$ et de mesures atomiques en quantité dénombrable.*

Théorème E (Approximation de Lusin)**.** *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction mesurable. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\mu\{f = g\} \geqslant 1 - \varepsilon$.*

Ce théorème intervient dans la preuve de la réciproque partielle du théorème de Gaboriau : si Φ réalise le coût, alors c'est un arborage.

Preuve du théorème E. C'est une conséquence de la régularité de la mesure de Lebesgue. On décompose f sous la forme $\sum 2^{-n} d_n$, avec d_n la fonction indicatrice de

$$D_n = \coprod_{k \text{ impair}} f^{-1}\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right].$$

Par régularité de la mesure de Lebesgue, les parties (boréliennes) D_n admettent un encadrement par (K_n, Ω_n) avec K_n compact, Ω_n ouvert, $K_n \subseteq D_n \subseteq \Omega_n$ et $\lambda(\Omega_n \setminus K_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Les ensembles K_n et $[0,1] \setminus \Omega_n$ sont des fermés disjoints ; d'après le théorème de Tietze-Urysohn il existe u_n approximant d_n dans le sens où u_n coïncide avec d_n sur $K_n \sqcup [0,1] \setminus \Omega_n$, u_n étant à valeurs dans $[0,1]$. On pose finalement

$$g(x) = \sum_n 2^{-n} u_n(x).$$

On a que f et g coïncident sur $\cap_n K_n \cup \cap_n \{[0,1] \setminus \Omega_n\}$ qui est de mesure plus petite que $\sum_n \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon$. □

Théorème F (Lusin-Novikov)**.** *Soit $Y \xrightarrow{\pi} Z$ une application borélienne à fibres dénombrables, entres espaces boréliens standards. Alors :*

1. *$\pi(Y)$ est un borélien de Z*
2. *Il existe une partition $Y = \coprod_i Y_i$ telle que les restrictions de π aux Y_i sont injectives.*
3. *Il existe $s : \pi(Y) \to Y$ une section mesurable de π.*

En particulier, le théorème entraîne que si $f : Y \to Z$ est injective borélienne entre espace boréliens standards, alors f est un isomorphisme borélien de Y sur $f(Y)$.

Références

[1] Alex Furman, *A survey of Measured Group Theory* in *Geometry, Rigidity and Group Actions*, 296-374, The university of Chicago Press, Chicago and London, 2011.

[2] Damien Gaboriau, *Equivalence Orbitale, Théorie Mesurée des Groupes, Nombres de Betti ℓ^2 et Percolation*, Notes de cours (version en ligne du 15 février 2016).

[3] Damien Gaboriau, *Coût des relations d'équivalence et des groupes*, Invent. math **139**, 41 - 98 (2000), Springer-Verlag.

[4] Yves Guivarc'h, *Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques*, Bull. Soc. math. France, 101 (1973), 333–379.

[5] Pierre de la Harpe, *Topics in Geometric Group Theory*, Chicago Lectures in Math. Series, 2000.